



МАТЕМАТИКА–
ПРОСТО КАК 2×2!

Нижегородская Творческая Лаборатория 2×2

Подготовка к турнирам
Лето 5–7 класс

Занятие 4
Комбинаторика
Теоретическая сводка

1. Правило суммы и правило произведения

Правило суммы. Если все варианты разбиты на несколько непересекающихся случаев, то общее число вариантов равно сумме чисел вариантов в этих случаях.

$$\text{общее число} = \text{случай 1} + \text{случай 2} + \text{случай 3} + \dots$$

Правило произведения. Если объект строится в несколько последовательных шагов, то число вариантов равно произведению чисел вариантов на каждом шаге.

$$\text{общее число} = \text{выбор 1} \cdot \text{выбор 2} \cdot \text{выбор 3} \cdot \dots$$

Как отличать

Если разбираем разные виды вариантов — складываем. Если вариант состоит из нескольких последовательных частей — умножаем варианты.

Ситуация	Что делаем
Либо красный, либо синий, либо зелёный маркер	Складываем варианты: это разные случаи.
Сначала выбираем маркер, потом клетку	Умножаем: каждое первое решение сочетается с каждым вторым.
Каждый из 8 ходов можно сделать или не сделать	На каждом шаге 2 варианта, значит перемножаем восемь двоек.

2. Правило “все – плохие”

- Иногда хорошие объекты напрямую считать неудобно, зато легко посчитать все объекты и плохие объекты.
- Тогда хорошие объекты остаются после вычитания плохих из всех.
- Этот приём особенно полезен, когда плохой объект означает одно понятное нарушение: пересечение, совпадение, запрещённую пару, неподходящий конец цепочки.

$$\text{хорошие} = \text{все} - \text{плохие}$$

Проверка

Нужно быть уверенным, что каждый объект либо хороший, либо плохой, и не существует третьего варианта.

Ситуация	Что делаем
Нужно, чтобы два отрезка не пересекались	Можно посчитать все пары отрезков и вычесть пересекающиеся.
Нужно, чтобы цепочка не собиралась	Можно понять, когда цепочка собирается, а затем перейти к противоположному случаю.
Нужно, чтобы не было запрещённого соседства	Часто проще сначала найти все расстановки с таким соседством.

3. Деление на количество повторяющихся вариантов

- Иногда один и тот же объект получается несколькими одинаковыми способами.
- Если каждый объект посчитан ровно k раз, то в конце нужно разделить полученное число на k .
- Главная трудность — доказать, что число повторений одинаковое для всех объектов.

истинное число объектов = число получений : число повторений

Типичная ситуация

Мы сначала считаем упорядоченные действия, хотя в ответе порядок не важен. Тогда один и тот же набор мог быть получен в разных порядках.

Ситуация	Что делаем
Два отрезка нарисованы красным и синим, но в условии цвета не важны	Каждая пара отрезков посчитана дважды: красный-синий и синий-красный.
Три предмета выбраны по очереди, но нужен только итоговый набор (порядок не важен)	Один набор появляется во всех возможных порядках выбора этих трёх предметов.
Фигура составлена из одинаковых деталей	Если перестановка одинаковых деталей ничего не меняет, такие перестановки не должны давать новые варианты.

Осторожно

Делить можно только тогда, когда каждый итоговый объект возникает одинаковое число раз. Если у разных объектов разное число повторений, нужно менять способ подсчёта.

4. Метод шаров и перегородок

- Метод помогает считать способы разложить одинаковые предметы по нескольким коробкам.
- Шары обозначают предметы, а перегородки разделяют коробки.
- Количество шаров между двумя соседними перегородками показывает, сколько предметов попало в соответствующую коробку.



Это значит: 2 предмета в первой коробке, 3 — во второй, 0 — в третьей.

Как читать запись

Если коробок 3, то нужно 2 перегородки. Если предметов 5, то нужно 5 шаров. Любая строка из шаров и перегородок задаёт одно распределение.

Ситуация	Что делаем
Можно класть в коробку ноль предметов	Разрешаем две перегородки рядом или перегородку с краю.
В каждой коробке должен быть хотя бы один предмет	Сначала кладем по одному предмету в каждую коробку, а оставшиеся распределяем как обычно.
Коробки разные: первая, вторая, третья	Порядок частей важен: 2 3 0 и 3 2 0 — разные распределения.

Пример метода шаров и перегородок

Задача. Сколькими способами можно разложить 5 одинаковых конфет по 3 разным коробкам, если коробка может оказаться пустой?

Записываем 5 шаров и 2 перегородки. Например:



количество способ поставить первую перегородку: 6 (в промежутки между конфетами)
 количество способов поставить вторую перегородку: 7 (в промежутки между конфетами и первой перегородкой)

Все варианты повторяются $2!$ раз, так как перегородки все одинаковые.

Итого способов $6 \cdot 7 / 2! = 21$

Вывод

Есть 21 способ разложить 5 одинаковых конфет по 3 разным коробкам.