



МАТЕМАТИКА—
ПРОСТО КАК 2×2!

**Нижегородская Творческая
Лаборатория
2×2**

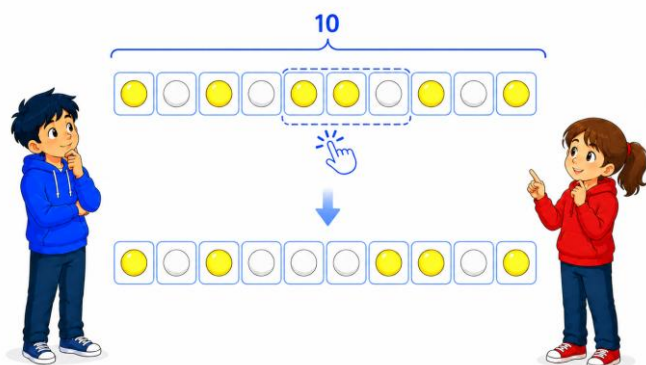
**Подготовка к турнирам
Лето 5–7 класс**

**Занятие 4
Комбинаторика**

Задача 1. Лампочки-кнопочки

Источник: УТЮМ-62, 6 класс, группа «Старт», третья лига, матбой №2, задача 7.

1



В ряд расположены 10 лампочек-кнопочек. Можно за ход одновременно нажать на три подряд расположенные лампочки. При одном таком нажатии эти три лампочки меняют своё состояние: выключенные включаются, а включенные выключаются.

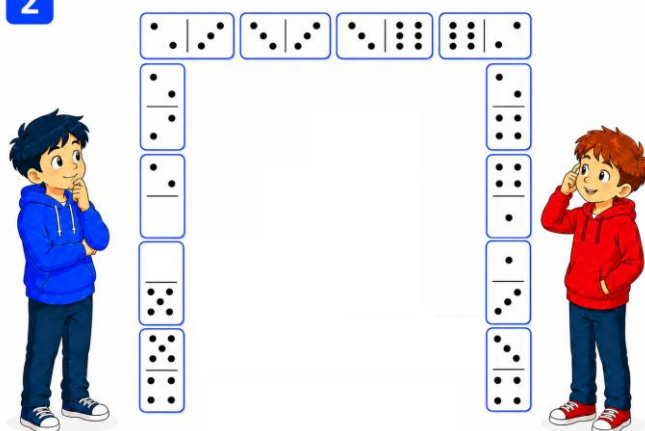
Сколько разных комбинаций из горящих лампочек можно получить, если в начале все лампочки выключены?

Подсказка. Пронумеруйте возможные ходы: нажать лампочки 1, 2, 3; 2, 3, 4; ...; 8, 9, 10. Каждый ход сделать можно один раз, либо не делать совсем.

Задача 2. Костяшки домино

Источник: УТЮМ-61, 6 класс, группа «Старт», третья лига, матбой №4, задача 4.

2



Комплект домино состоит из 28 костяшек, на каждой из которых две цифры от 0 до 6 во всевозможных комбинациях.

Старуха Шапокляк решила украсть две костяшки из полного комплекта домино, чтобы оставшиеся нельзя было выложить в цепочку по правилам домино.

Сколькими способами она может это сделать?

Подсказка. Представьте комплект домино как граф с вершинами 0, 1, ..., 6. Костяшка — это ребро, а дубль — петля. Когда в таком графе можно пройти по всем рёбрам одной цепочкой?

Задача 3. Фишки на шахматной доске

Источник: УТЮМ-65, 6 класс, группа «Старт», высшая лига, матбой №3, задача 1.

3

1	1	0	1	●	1	0	0
●	1	1	2	2	1	0	0
1	1	1	●	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	●	1
1	●	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	●	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	●
0	0	0	0	0	0	1	1



В некоторых клетках шахматной доски 8×8 стоит по одной фишке.

В каждой клетке, в которой нет фишки, записано число, равное количеству фишек в соседних с ней клетках. Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина.

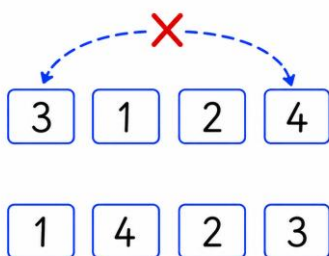
Сколько существует расположений фишек, при которых сумма всех записанных чисел нечётна?

Подсказка. Посчитайте сумму не по пустым клеткам, а по фишкам: сколько пустых соседей даёт каждая фишка. Потом смотрите только на чётность.

Задача 4. Ряды, не являющиеся плохими

Источник: УТЮМ-59, 6 класс, группа «Старт», высшая лига, матбой №4, задача 3.

4



Дано натуральное число N . Числа $1, 2, \dots, N$ выписали в некотором порядке.

Назовём получившийся ряд плохим, если в нём найдутся два несоседних числа $A > B$ такие, что между A и B стоят только числа, меньшие A и большие B .

Например, ряд $3, 1, 2, 4$ плохой, так как между числами 1 и 4 стоит только число 2 , а оно больше 1 и меньше 4 . А ряд $1, 4, 2, 3$ не является плохим.

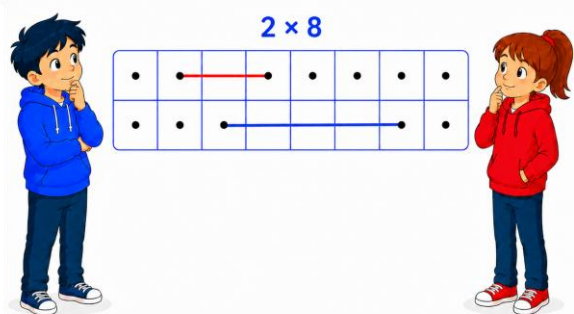
Сколько существует различных рядов, не являющихся плохими?

Подсказка. Сначала докажите, что в хорошем ряду числа 1 и N обязательно стоят рядом. Затем подумайте, как должны располагаться остальные числа слева и справа от этой пары.

Задача 5. Два непересекающихся отрезка

Источник: УТЮМ-64, 7 класс, младшая группа, третья лига, матбой №2, задача 8.

5



Отмечены 16 точек — центры клеток прямоугольника 2×8 . Нарисованы два отрезка с концами в отмеченных точках. Эти отрезки не имеют общих точек, даже концов.

Сколькими способами могут быть выбраны эти отрезки?

Подсказка. Сначала выберите 4 точки, которые будут концами двух отрезков. Разберите случай: все 4 точки в одном ряду; 3 в одном ряду и 1 в другом; по 2 точки в каждом ряду.

Задача 6. Ладьи на шахматной доске

Источник: УТЮМ-66, 7 класс, младшая группа, третья лига, матбой №1, задача 1.

6



На шахматной доске стоят 7 не бьющих друг друга ладей, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 7.

Продельвается следующий процесс: сначала делается ход ладьёй с номером 1, затем ладьёй с номером 2, и так далее, в конце — ладьёй с номером 7. Причём после каждого хода ладьи по-прежнему не должны бить друг друга. После окончания процесса с ладей стираются их номера.

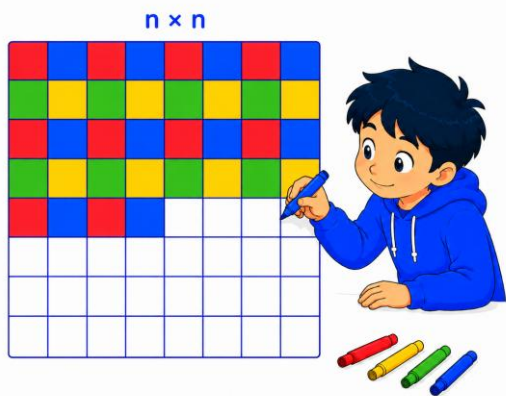
Сколько различных расстановок ладей можно получить с помощью данного процесса из изначальной?

Подсказка. В любой момент есть ровно одна свободная строка и ровно один свободный столбец. Подумайте, какие два варианта хода есть у очередной ладьи.

Задача 7. Раскраска квадрата в четыре цвета

Источник: УТЮМ-62, 7 класс, младшая группа, высшая лига, матбой №1, задача 4.

7



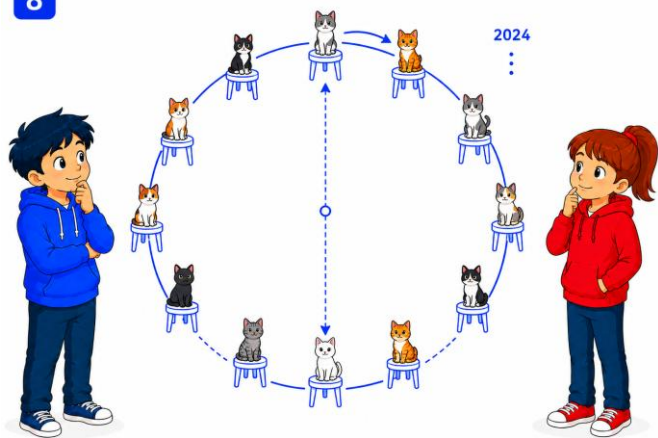
Дано натуральное число $n > 1$.
Сколькими способами можно раскрасить клетки квадрата $n \times n$ в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета?
Каждую клетку красим ровно в один цвет.

Подсказка. В любом квадрате 2×2 должны стоять все четыре цвета. Посмотрите, какие типы пар цветов могут стоять на границах соседних столбцов и соседних строк.

Задача 8. Дрессированные котики на 2024 стульях

Источник: УТЮМ-62, 7 класс, младшая группа, высшая лига, матбой №3, задача 7.

8



По кругу через равные промежутки расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа, либо на диаметрально противоположный стул. Оказалось, что все стулья снова заняты.
Найдите число способов, как такое могло произойти.

Подсказка. Пронумеруйте стулья по кругу. Для каждого стула посмотрите, с каких двух стульев на него мог попасть котик. Используйте условие, что после прыжка каждый стул снова занят ровно одним котиком.