ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

с решениями и указаниями

5–7

классы

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
Лаборатория знаний

УДК 373.167.1:519.17
ББК 22.176я721.6
С30

Семендяева Н. Л.

С30 Олимпиадная математика. Задачи по теории графов с решениями и указаниями. 5–7 классы : учебно-методическое пособие / Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2023. — 175 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-93208-328-4

Настоящее пособие составлено на основе олимпиадных задач по математике преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также указания и решения к большинству задач.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

УДК 373.167.1:519.17
ББК 22.176я721.6

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Семендяева Наталья Леонидовна
Федотов Михаил Валентинович

**ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА.
ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ.
5–7 КЛАССЫ**

Учебно-методическое пособие

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*. Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2ε

Подписано в печать 22.09.22. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 14,30. Заказ № ВЗК-03815-22.

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография», филиал «Дом печати — ВЯТКА»
в полном соответствии с качеством предоставленных материалов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122. Тел.
(8332) 53-53-80, info@gipp.kirov.ru

ISBN 978-5-93208-328-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Уважаемый читатель, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике для старшеклассников для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА и ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя обычно не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходят без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали много задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является пятым в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё несколько книг для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершит серию, конечно же, пособие для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу *«от простого — к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи в скобках приведены классы, для которых эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, и часто, наоборот, задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций в скобках, относитесь к ним творчески. Кстати, распределение задач по темам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным темам.

В принципе, по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса, и так далее. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за один год, если вы уже в 7 классе.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\in$ — знак принадлежности элемента множеству;

$\cup$ — знак объединения двух множеств;

$\Longrightarrow$ — следовательно;

$\Longleftrightarrow$ — тогда и только тогда;

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

$\left\{\begin{array}{l}\ldots\\ \ldots\end{array}\right.$ — знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;

$\left[\begin{array}{l}\ldots\\ \ldots\end{array}\right.$ — знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Часть I. **ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ**

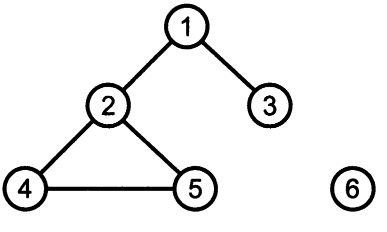
В этом пособии приведены задачи, при решении которых используется теория графов.

Теория графов не изучается в 5–7 классах общеобразовательных школ. Однако есть задачи, которые легко решаются с помощью теории графов и трудно или даже очень трудно решаются другими способами. И хотя теория графов не изучается в обычной школе, для её понимания и освоения достаточно знаний по математике, которые даются в средней школе. Определим понятие графа[1)].

Пусть задано некоторое непустое множество элементов V и множество E пар различных элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E называются *рёбрами* графа, а пара (V, E), то есть множество вершин и рёбер, называется *графом.*

Для наглядности обычно используют геометрическое представление графа. Вершины графа изображаются точками на плоскости. Если две вершины образуют ребро, то соответствующие две точки соединяют отрезком.

Например, на рисунке изображён граф G, заданный множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и множеством рёбер $E = \{(1; 2), (1; 3), (2; 4), (2; 5), (4; 5)\}$.



Две вершины, соединённые ребром, называются *смежными*; они также называются *концами* этого ребра. При этом говорят, что ребро *выходит* из вершины. Число рёбер, выходящих из

[1)]Для желающих более подробно разобраться с теорией графов рекомендуем книгу [7].

вершины v, называется *степенью* вершины v и обозначается $d(v)$. Две вершины, не соединённые ребром, называются *несмежными*.

Для графа, изображённого на рисунке, $d(1) = 2$, $d(2) = 3$, $d(3) = 1$, $d(4) = 2$, $d(5) = 2$, $d(6) = 0$. Вершина степени 0 называется *изолированной* (вершина 6 — изолированная), вершина степени 1 называется *висячей* (вершина 3 — висячая). Вершины 1 и 2 являются смежными, а вершины 2 и 3 — несмежными.

Часто удобно рассматривать не весь граф, а какую-то его часть — подграф. Граф H называется *подграфом* графа G, если вершины и рёбра графа H принадлежат графу G. Подграф H графа G называется *подграфом, порождённым множеством вершин* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, если он содержит вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и все рёбра графа G, соединяющие эти вершины. Подграф H графа G называется *подграфом, порождённым множеством рёбер* $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$, если он содержит рёбра $e_1, e_2, \ldots, e_s$ и все вершины графа G, являющиеся концами этих рёбер.

В графе G, изображённом на рисунке, можно выделить, например, два подграфа: H_1 с вершинами $\{1, 2, 3\}$ и рёбрами $\{(1;2), (1;3)\}$ и H_2 с вершинами $\{2, 4, 5\}$ и рёбрами $\{(2;4), (2;5), (4;5)\}$. При этом подграф H_1 порождён множеством вершин $\{1, 2, 3\}$ или множеством рёбер $\{(1;2), (1;3)\}$, а подграф H_2 порождён множеством вершин $\{2, 4, 5\}$ или множеством рёбер $\{(2;4), (2;5), (4;5)\}$.

1. Вводные задачи

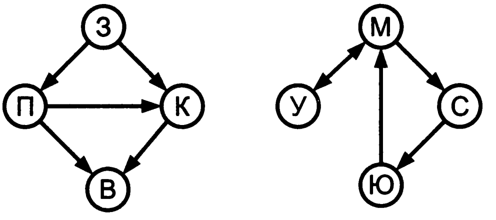
Теоретический материал

В этом разделе приведены вводные задачи на графы, в которых надо нарисовать соответствующий граф и исследовать его.

Примеры решения задач

Пример 1. Между планетами введено космическое сообщение по следующим маршрутам: З—К, П—В, З—П, П—К, К—В, У—М, М—С, С—Ю, Ю—М, М—У. Можно ли добраться с З до М?

Решение. Нарисуем схему, в которой планетам будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам — направленные непересекающиеся между собой линии.



Из рисунка видно, что получившийся граф состоит из двух подграфов, не связанных между собой. При этом планеты З и М находятся в разных подграфах, поэтому долететь с планеты З до планеты М нельзя.

Ответ. Нет.

Пример 2. В 15-этажном доме имеется лифт с двумя кнопками: «+7» и «−9». Можно ли проехать с 3-го этажа на 12-й?

Решение. Приведём два способа решения: в первом способе разберём, до каких этажей можно добраться, стартуя с 3-го этажа, а во втором, наоборот, посмотрим, с каких этажей можно попасть на 12-й этаж.

Первый способ. С 3-го этажа за один «ход» можно попасть только на 10-й, оттуда — только на 1-й, потом — на 8-й, на 15-й, на 6-й, на 13-й, на 4-й, на 11-й, на 2-й и, наконец, на 9-й. А с 9-го этажа никуда проехать нельзя. Поэтому до 12-го этажа проехать не удастся. Графически это можно изобразить так:

$$3 \to 10 \to 1 \to 8 \to 15 \to 6 \to 13 \to 4 \to 11 \to 2 \to 9.$$

Второй способ. На 12-й этаж за один «ход» можно попасть только с 5-го, туда — только с 14-го, туда — только с 7-го. А на 7-й этаж приехать ниоткуда нельзя.

$$12 \leftarrow 5 \leftarrow 14 \leftarrow 7.$$

Ответ. Нет.

Пример 3. 30 команд сыграли турнир по олимпийской системе. Сколько всего было сыграно матчей?

Решение. В этой задаче можно не рисовать никаких графов. За одну игру из турнира с олимпийской системой выбывает ровно одна команда. Значит, для определения победителя необходимо сыграть 29 игр, чтобы выбыло 29 команд и осталась одна — победитель.

Ответ. 29 команд.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}6}$ Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озёр, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Доказать, что он ошибается.

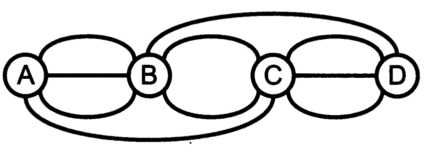
2. $\boxed{5\text{-}6}$ Школьный драмкружок, готовясь к постановке отрывка из сказки А. С. Пушкина о царе Салтане, решил распределить роли между участниками.
— Я буду Черномором, — сказал Юра.
— Нет, Черномором буду я, — заявил Коля.
— Ладно, — уступил ему Юра, — я могу сыграть Гвидона.
— Ну, я могу стать Салтаном, — тоже проявил уступчивость Коля.
— Я же согласен быть только Гвидоном! — произнёс Миша.
Желания мальчиков были удовлетворены. Как распределились роли?

3. $\boxed{5\text{-}6}$ Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля—Меркурий, Плутон—Венера, Земля—Плутон, Плутон—Меркурий, Меркурий—Венера, Уран—Нептун, Нептун—Сатурн, Сатурн—Юпитер, Юпитер—Марс и Марс—Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

4. $\boxed{6\text{-}7}$ Король хочет построить шесть крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения крепостей и дорог, чтобы на ней было только три перекрёстка и на каждом из них пересекались две дороги.

5. $\boxed{6\text{-}7}$ Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

6. $\boxed{6\text{-}7}$ Города A, B, C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке. Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D, побывав в каждом городе ровно по одному разу?



7. [6-7] В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью этого лифта попасть с 20-го этажа на 1-й? (Когда сверху меньше 8 этажей, лифт вверх не пойдёт. Аналогично — вниз.)

8. [6-7] Лифт в 100-этажном доме имеет две кнопки: «+7» и «−9». (Первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9.) Можно ли проехать:
   а) с 1-го на 2-й этаж;
   б) со 2-го на 1-й этаж;
   в) с любого на любой этаж?

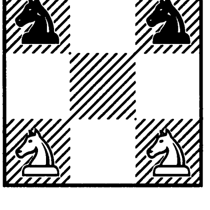
9. [6-7] По столбу высотой 15 метров ползёт улитка. За день она поднимается на 4 метра, за ночь опускается на 3 метра. Через какое время она достигнет вершины столба?

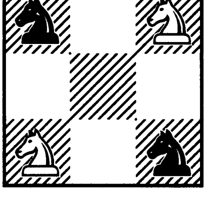
10. [6-7] 32 теннисиста играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). За какое наименьшее количество встреч можно определить победителя?

11. [6-7] 32 теннисиста играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). За какое наименьшее количество встреч можно определить двух сильнейших теннисистов?

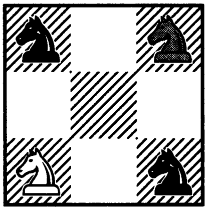
12. [6-7] В стране Цифра есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться самолётом из города 1 в город 9?

13. [6-7] Можно ли, сделав несколько ходов конями из положения на рисунке слева, расположить их так, как показано на рисунке справа?



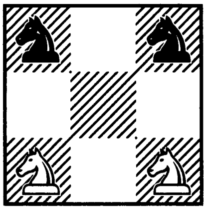


14. [6-7] Заменим на втором рисунке задачи 13 одного из белых коней красным. Как поменять местами белого и красного коней за наименьшее число ходов?



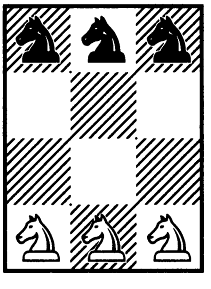
красный

15. [6-7] Имеется шахматная доска 3×3, в верхних двух её углах стоят два чёрных коня, в нижних — два белых. За 16 ходов поставьте белых коней на место чёрных, а чёрных — на место белых и докажите, что за меньшее число ходов это сделать невозможно.



16. [6-7] Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти её ходом коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

17. [6-7] Имеется шахматная доска 3×4, в верхних трёх её клетках стоят три чёрных коня, в нижних — три белых. За наименьшее число ходов поменяйте местами трёх белых и трёх чёрных коней.



18. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой из них было а) чётное; б) нечётное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если они имеют общую сторону.)

19. $\boxed{6\text{-}7}$ В городе X с любой станции метро можно проехать на любую другую. При каких условиях одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую?

20. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что из любых шести человек всегда найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых между собой.

21. $\boxed{6\text{-}7}$ Шахматный турнир проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Лёша и Дима — по три, Семён и Илья — по две, Женя — одну. С кем сыграл Лёша?

22. $\boxed{6\text{-}7}$ В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 5 школьников, сыграно 6 партий. Больше всех встреч провели Ваня и Миша — по 3. Какое число партий сыграл участник, проведший наименьшее количество встреч?

23. $\boxed{6\text{-}7}$ Спортивный турнир проводится по круговой системе. Доказать, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, проведшие одинаковое число встреч.

24. $\boxed{6\text{-}7}$ На плоскости расположено конечное число точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками. Доказать, что существуют две точки, из которых выходит одно и то же число отрезков.

2. Степень вершины, подсчёт числа рёбер

Теоретический материал

В этом разделе приведены задачи, в которых при решении используется подсчёт степеней вершин и числа рёбер. Напомним, что *степенью вершины* называется количество рёбер, выходящих из этой вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется *нечётной*, а вершина, имеющая чётную степень, — *чётной*.

Примеры решения задач

Пример 1. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Решение. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют городам, а рёбра — соединяющим их дорогам. В графе всего 100 вершин, степень каждой вершины равна 4. Посчитаем количество рёбер в этом графе. Для этого сложим степени всех его вершин. Так как при таком подсчёте каждое ребро учтено дважды (поскольку каждое ребро всегда соединяет ровно две вершины), то число рёбер графа равно $100 \cdot \frac{4}{2} = 200$. Это и есть общее число дорог.

Ответ. 200 дорог.

> ***Замечание.*** При решении этой задачи мы доказали известную лемму о рукопожатиях:
> *Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер.*

Пример 2. В некотором городе 2015 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён с пятнадцатью другими?

Решение. Предположим, что это возможно. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а рёбра — соединяющим их проводам. В графе всего 2015 вершин, степень каждой вершины равна 15. Тогда число рёбер графа должно быть равно $2015 \cdot \frac{15}{2}$. Но это число не является целым. Поэтому такого графа не существует и наше предположение неверно. Значит, соединить телефоны требуемым образом нельзя.

Ответ. Нельзя.

Замечание. Из леммы о рукопожатиях вытекает очень полезное следствие, которое мы доказали в этой задаче:
В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Пример 3. Марсиане очень любят исполнять танцы, в которых нужно браться за руки. В танце «Дружба» может участвовать не более 7 марсиан, у каждого из которых не более трёх рук. Какое наибольшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина?

Решение. Построим граф G, в котором вершины будут обозначать марсиан, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им марсиане взялись за руки. Тогда степень вершины будет соответствовать количеству рук марсианина, а сумма степеней — числу рук, участвующих в танце. По следствию из леммы о рукопожатиях граф не может иметь 7 вершин нечётной степени. Поэтому наибольшая возможная сумма степеней графа G получится, если граф будет иметь 6 вершин степени 3 и одну вершину степени 2. Тогда у танцующих будет 20 рук. (Самостоятельно постройте граф, имеющий требуемые степени вершин.)

Ответ. 20 рук.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}6}$ а) В государстве 50 городов, и из каждого выходит 8 дорог. Сколько всего дорог в государстве?

   б) В соревнованиях по круговой системе с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно?

2. $\boxed{5\text{-}6}$ В турнире участвовали шесть шахматистов. Каждые два участника турнира сыграли между собой по одной партии. Сколько всего было сыграно партий? Сколько партий сыграл каждый участник? Сколько очков набрали шахматисты все вместе?

3. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Группа, в составе которой Пётр совершил туристическую поездку, состояла из пятнадцати человек. Вернувшись из путешествия, Пётр рассказал, что каждый участник группы был ранее знаком ровно с пятью другими участниками. Возможно ли это?

   б) Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

4. $\boxed{5\text{-}6}$ Школьник сказал своему приятелю Вите Иванову:

   — У нас в классе тридцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с одиннадцатью одноклассниками.

   — Не может этого быть, — сразу ответил Витя Иванов, победитель математической олимпиады.

   Почему он так решил?

5. $\boxed{5\text{-}6}$ Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлёт письма трём из остальных. Может ли оказаться, что каждый получит письма от тех, кому напишет сам?

6. $\boxed{5\text{-}6}$ Можно ли на плоскости так нарисовать 9 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

7. $\boxed{7}$ Существует ли многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон?

8. $\boxed{5\text{-}6}$ Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 100 дорог между городами?

9. $\boxed{5\text{-}6}$ а) В турнире принимают участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

   б) Можно ли 1973 телефона соединить между собой так, чтобы каждый был соединён с 1971 телефоном?

10. $\boxed{5\text{-}6}$ В школе 953 ученика. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Доказать, что хотя бы у одного из них число знакомых среди учеников этой школы чётно.

11. $\boxed{5\text{-}6}$ а) В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по три друга в этом классе, 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

б) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединён с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединён с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединён с пятью другими?

12. $\boxed{5\text{-}6}$ а) У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

б) На третье занятие кружка по математике пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на занятии кружковцев, а каждый мальчик — ровно с пятью?

13. $\boxed{5\text{-}6}$ В Диснейленде на озере семь островов, из каждого из них выходит один, три или пять мостов. Доказать, что хотя бы один из мостов ведёт на берег.

14. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Доказать, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

б) У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Доказать, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

15. $\boxed{5\text{-}7}$ В танце «Большая дружба» может участвовать не менее семи марсиан, у каждого из которых не менее пяти рук. Какое наименьшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина?

16. $\boxed{6\text{-}7}$ На столе лежат журналы. Каждый посетитель просмотрел два журнала, каждый журнал просмотрели три человека. Для каждой пары журналов есть только один посетитель, который их просмотрел. Сколько журналов и посетителей?

17. $\boxed{5\text{-}6}$ В городе N от каждой площади отходит ровно 5 улиц, соединяющих площади. Доказать, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ а) На кошачьей выставке каждый посетитель погладил ровно трёх кошек. При этом оказалось, что каждую кошку погладили ровно три посетителя. Доказать, что посетителей было ровно столько же, сколько кошек.

б) В Цветочном городе каждый коротышка знаком с 6 малышками, а каждая малышка — с 6 коротышками. Доказать, что в этом городе число малышек равно числу коротышек.

19. 6-7 На кошачьей выставке в ряд сидят 10 котов и 19 кошек, причём рядом с каждой кошкой сидит более толстый кот. Доказать, что рядом с любым котом сидит кошка, которая тоньше его.

20. 6-7 На туристическом слёте выяснилось, что каждый юноша знаком с 8 девушками, а каждая девушка знакома с 6 юношами. Кого больше на слёте: юношей или девушек?

21. 6-7 В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают Карабасы и Барабасы. Каждый Карабас знаком с шестью Карабасами и девятью Барабасами. Каждый Барабас знаком с десятью Карабасами и семью Барабасами. Кого в этой стране больше — Карабасов или Барабасов?

22. 6-7 В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и девочек?

23. 6-7 За столом сидят несколько мальчиков и пять девочек, а на столе на тарелке лежат 30 булочек. Каждая девочка дала по булочке (с тарелки) каждому знакомому ей мальчику, а затем каждый мальчик дал по булочке (с тарелки) каждой незнакомой ему девочке. После этого оказалось, что все булочки розданы. Сколько было мальчиков?

24. 6-7 1997 городов соединены дорогами так, что из любого города можно доехать до любого другого (возможно, с пересадками). Доказать, что построено по крайней мере 1996 дорог.

25. 6-7 В шахматном турнире в один круг участвуют 17 человек. Верно ли, что в любой момент турнира найдётся шахматист, сыгравший к этому моменту чётное число партий (может быть, ни одной)?

26. 5-6 В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире и сколько партий сыграл заболевший участник?

27. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира **до** того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

    б) В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира **после** того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

28. $\boxed{6\text{-}7}$ У царя Гвидона было 5 сыновей. Из всех его потомков (детей, внуков, правнуков и так далее) 57 имели ровно трёх сыновей, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона? (Учитываются только потомки мужского пола.)

29. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

30. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что в городе найдутся два человека, у которых одинаковое количество знакомых горожан.

31. $\boxed{7}$ На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

32. $\boxed{6\text{-}7}$ В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?

33. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли нарисовать 1006 различных 2012-угольников, у которых все вершины общие, но при этом ни у каких двух нет ни одной общей стороны?

34. $\boxed{6\text{-}7}$ В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника турнира сыграли по 11 партий, один — 10 партий, три — по 8 партий и два — по 7 партий. Может ли он оказаться прав?

35. $\boxed{6\text{-}7}$ Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 25 игр, а другой — 17 игр. Мог ли третий участник сыграть а) 34; б) 35; в) 56 игр?

36. $\boxed{7}$ Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

37. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Во дворе стоят 10 столбов. Электрику Петрову дали задание соединить столбы проводами таким образом, чтобы каждый провод соединял ровно два столба, никакие два столба не были соединены дважды и, главное, чтобы для любых четырёх столбов нашлось ровно три провода, протянутых между этими столбами. Доказать, что электрик Петров не сумеет справиться с этим заданием.

б) А что, если столбов не 10, а 12?

3. Связность графов. Эйлеровы графы

Теоретический материал

Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно по рёбрам перейти к любой другой. В противном случае граф называется *несвязным*. Несвязный граф состоит из нескольких частей, каждая из которых является связным графом. Эти части называются *компонентами связности* графа. Связный граф имеет одну компоненту связности.

Теорема (достаточное условие связности графа). Если в графе, имеющем n вершин, степень каждой вершины не менее $\frac{n-1}{2}$, то этот граф связный.

В одной из задач ниже будет предложено доказать эту теорему.

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз, называется *эйлеровым*. Очевидно, что эйлеров граф является связным. Рисуя эйлеров граф, в каждую вершину, за исключением, может быть, первой и последней, мы войдём столько же раз, сколько выйдем из неё, причём войдём и выйдем по разным рёбрам. Поэтому степени всех вершин, за исключением, может быть, первой и последней, должны быть чётными. Отсюда следует, что *эйлеров граф связен и имеет не более двух нечётных вершин*. Если же начало и конец маршрута должны совпадать, то эйлеров граф не должен иметь нечётных вершин.

Примеры решения задач

Пример 1. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковёр-самолёт. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Доказать, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Решение. Рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Нам нужно доказать, что она содержит также и город Дальний.

Предположим противное. Тогда в этой компоненте связности из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин — по 20 рёбер. Таким образом, в этом графе (компоненте связности) ровно одна нечётная вершина. Этого быть не может — противоречие.

Пример 2. В одной стране каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Доказать, что из любого города страны в любой другой можно доехать (возможно, с пересадками) только поездом или только автобусом.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют городам и две вершины будут соединены ребром тогда и только тогда, когда эти города соединены железнодорожным маршрутом. В этом случае граф $\widetilde{G}$, в котором города соединены ребром тогда и только тогда, когда эти города соединены автобусным маршрутом, будет дополнительным к графу G.

Граф $\widetilde{G}$ называется *дополнительным графом* к графу G, если он имеет те же вершины, что и граф G, а ребро соединяет две вершины графа $\widetilde{G}$ тогда и только тогда, когда эти вершины не соединены ребром в графе G.

Докажем утверждение: *из двух графов, G и дополнительного к нему графа $\widetilde{G}$, хотя бы один связен.*

Пусть граф G является несвязным и состоит из нескольких связных компонент $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Тогда в дополнительном графе существуют рёбра между любыми вершинами компонент G_i и G_j $(i \neq j)$ и граф $\widetilde{G}$ будет связным. Что и требовалось доказать.

Поэтому один из графов, G или $\widetilde{G}$, в нашей задаче будет связным, а это и означает, что из любого города страны в любой другой можно доехать только поездом или только автобусом.

Пример 3. Жук ползает по рёбрам куба. Сможет ли он последовательно обойти все 12 рёбер куба, не пройдя дважды по одному ребру?

Решение. У куба из каждой вершины выходит по три ребра, то есть куб является графом с восемью нечётными вершинами. Поэтому куб не является эйлеровым графом, а значит, жук не сможет последовательно обойти все 12 рёбер куба, не пройдя дважды по одному ребру.

Ответ. Нет.

Задачи

1. $\boxed{6\text{-}7}$ Города страны соединены авиалиниями. Известно, что, как ни разделить города на две группы, всегда найдётся авиалиния, соединяющая какой-нибудь город первой группы с каким-нибудь городом второй группы. Доказать, что можно перелететь из любого города страны в любой другой (возможно, с пересадками).

2. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Летом Иван отдыхал в молодёжном лагере «Восход», где вместе с ним находились 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причём у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Доказать, что Иван может узнать адрес Николая, то есть существует цепочка из школьников, которая начинается Иваном и оканчивается Николаем и в которой каждая пара обменялась адресами.

   б) Какой наименьшей длины может быть цепочка из школьников, которая начинается Иваном и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами (см. задачу а))?

3. $\boxed{7}$ Доказать, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, связный.

4. $\boxed{6\text{-}7}$ Каждый из семи мальчиков имеет не менее трёх родных братьев. Доказать, что все мальчики — братья.

5. $\boxed{6\text{-}7}$ В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами с не менее чем семью другими. Доказать, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

6. $\boxed{6\text{-}7}$ В стране 1974 города. Из столицы выходит 101 авиалиния, а из города Дальний — одна авиалиния. Из всех остальных городов выходит по 20 авиалиний. Доказать, что из столицы можно прилететь в Дальний, возможно, с пересадками.

7. $\boxed{7}$ В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Доказать, что:

   а) можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;

   б) из некоторого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более чем с одной пересадкой (пользоваться можно только выбранным видом транспорта);

   в) каждый город обладает свойством, указанным в пункте б);

   г) можно выбрать вид транспорта так, чтобы, пользуясь только им, можно было добраться из любого города в любой другой не более чем с двумя пересадками.

8. $\boxed{7}$ В вершинах и пересечениях диагоналей выпуклого многоугольника расположены трамвайные остановки, причём известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. На некоторых диагоналях-улицах введено трамвайное движение так, что мимо каждой остановки проходит хотя бы один трамвайный путь. Доказать, что от любой остановки до любой другой можно добраться на трамвае, сделав не более двух пересадок.

9. $\boxed{6\text{-}7}$ Система точек, соединённых отрезками, называется «связной», если из любой точки можно пройти в любую другую по этим отрезкам. Можно ли соединить пять точек в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)

10. $\boxed{6\text{-}7}$ В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Доказать, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

11. $\boxed{7}$ 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно раскрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой раскраски?

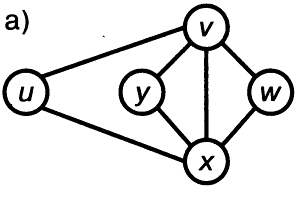
12. $\boxed{7}$ В каждой клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Может ли количество этих частей быть

а) больше 15? б) больше 20?

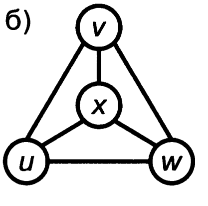
13. $\boxed{7}$ Каждый из 450 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Доказать, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не бил.

14. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли нарисовать графы, изображённые на рисунках а) и б), не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз (то есть являются ли эти графы эйлеровыми)?

а)

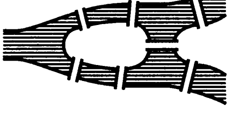


б)

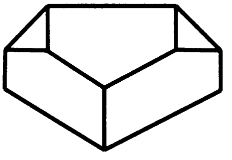


15. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Художник-авангардист нарисовал картину «Контур квадрата и его диагонали». Мог ли он нарисовать свою картину, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды?

б) Схема мостов Кёнигсберга изображена на рисунке. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?



в) Хулиган Вася решил прогуляться по парку и его окрестностям (см. рисунок) так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз. Сможет ли он это сделать?



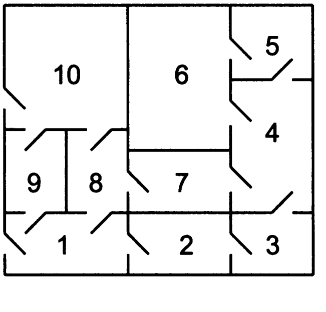
16. [6-7] Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого острова. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист

   а) не с него начал и не на нём закончил?
   б) с него начал, но не на нём закончил?
   в) с него начал и на нём закончил?

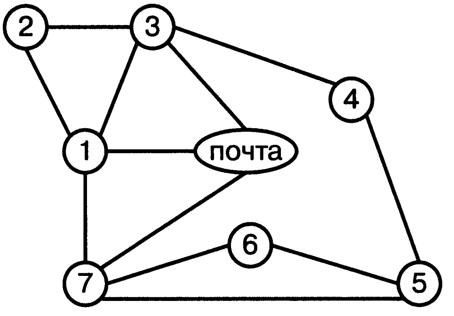
17. [6-7] а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

   б) Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы изготовить требуемый каркас?

18. [6-7] а) На рисунке изображён план подвала из 10 комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение?



б) Почтальон разнёс почту во все дома деревни, после чего зашёл к дяде Степану поговорить. На рисунке показаны все тропинки, которые проходил почтальон, причём, как оказалось, ни по одной из них он не проходил дважды. Каков мог быть маршрут почтальона? В каком доме живёт дядя Степан?



4. Маршруты, цепи, циклы, двудольные графы

Теоретический материал

Маршрутом в графе называется такая последовательность чередующихся вершин v_i и рёбер e_j графа

$$(v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \ldots, e_{k-1}, v_k),$$

что каждое ребро соединяет вершины последовательности, между которыми оно находится, то есть ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}.

Маршрут, в котором все рёбра различны, называется *цепью.*

Цепь можно задавать в графе перечислением только вершин или только рёбер.

Цепь, в которой первая и последняя вершины совпадают, называется *циклом.*

Цепь графа называется *простой* цепью, если все вершины, кроме, возможно, крайних, различны.

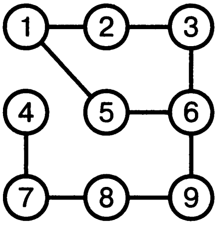
Цикл графа называется *простым* циклом, если все его вершины различны.

Длиной цепи называется число содержащихся в ней рёбер.

Расстоянием между двумя вершинами графа называется наименьшая из длин цепей, соединяющих эти вершины. Расстояние между вершинами u и v обозначается $d(u, v)$.

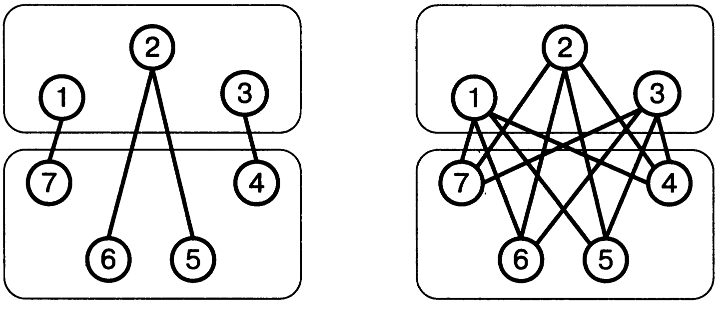
Например, на рисунке цепь $(4, 7, 8, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6)$ не является простой; длина этой цепи равна 9; $d(4, 6) = 4$, $d(1, 6) = 2$.

Простой цикл $(1, 2, 3, 6, 5, 1)$; его длина равна 5.



Граф, вершины которого можно разбить на два множества (две *доли*) таким образом, что каждое ребро будет соединять вершины из разных множеств, называется *двудольным*.

Двудольный граф, у которого каждая вершина одной доли соединена ребром с каждой вершиной другой доли, называется *полным двудольным графом*. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается $K_{p,q}$. Количество рёбер в таком графе равно $p \cdot q$.



двудольный граф полный двудольный граф $K_{3,4}$

Примеры решения задач

Пример 1. На плоскости даны шесть точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая пара точек соединена отрезком синего или красного цвета. Доказать, что среди данных точек можно выбрать такие три, что все стороны образованного ими треугольника будут окрашены в один цвет.

Решение. Рассмотрим произвольную точку из шести данных точек. По крайней мере три отрезка из пяти, выходящих из этой точки, окрашены в один цвет. Можно считать эти отрезки синими. Если два из их концов соединены отрезком синего цвета, то нужный треугольник найден. Если это не так, то все три конца соединены красными отрезками и образуют требуемый треугольник красного цвета.

Замечание. В этой задаче мы выделили цикл, состоящий из трёх звеньев одного цвета.

Пример 2. В море живут осьминожки. У каждой из них или одна, или две подруги. Когда взошло солнце, те, у кого было две подруги, посинели, а те, у кого была одна подруга, покраснели, и оказалось, что любые две подруги — разноцветные. Однако подруги должны иметь одинаковый цвет, и поэтому 10 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, а 12 красных — в синий. Сколько осьминожек живёт в море?

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины будут изображать осьминожек; две вершины будут соединены ребром, если соответствующие им осьминожки дружат. Раскраска осьминожек определяет такую же раскраску соответствующих им вершин графа.

Изучим строение графа. Из условия следует, что степень каждой вершины графа равна или 1, или 2. Значит, компонентами графа могут быть только цепи или циклы. При этом у циклов степени всех вершин равны двум, а у цепей только крайние вершины имеют степень, равную 1.

Докажем, что в графе G циклы отсутствуют. Предположим, что некоторый цикл существует. Тогда после восхода солнца все вершины этого цикла станут синими, так как степень каждой вершины цикла равна двум. Эта ситуация запрещена условием задачи — после восхода солнца любые две подруги должны стать разноцветными. Значит, циклы отсутствуют.

Рассмотрим цепи графа G. Так как после восхода солнца все вершины цепей, кроме концевых, станут синими, а по условию задачи любые две подруги должны стать разноцветными, то в G отсутствуют цепи, содержащие более двух рёбер. С другой стороны, в графе нет и цепей, содержащих одно ребро, так как после восхода солнца обе вершины таких цепей по условию станут красными, что также противоречит условию задачи.

Значит, компонентами графа G являются цепи, содержащие ровно два ребра, и в каждой такой цепи центральная осьминожка дружит с двумя крайними. После восхода солнца две концевые вершины каждой цепи станут красными, а одна центральная — синей. Поскольку подруги должны иметь одинаковый цвет, в 10 цепях центральные вершины перекрасились в красный цвет, а в $12 : 2 = 6$ цепях концевые вершины перекрасились в синий цвет. Итак, в графе всего $10 + 6 = 16$ цепей и $16 \cdot 3 = 48$ вершин, а в море 48 осьминожек.

Ответ. 48 осьминожек.

Пример 3 (теорема Кёнига (1936)). *Для того чтобы граф был двудольным, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечётной длины.*

Решение. *Необходимость.* Пусть G — двудольный граф, Q — один из его циклов. Пройдём по всем рёбрам цикла Q. Так как цикл начинается и заканчивается в одной и той же вершине, а граф двудольный, то есть каждое ребро начинается в одной доле графа, а заканчивается в другой, то нам необходимо совершить чётное число переходов по рёбрам, чтобы вернуться в исходную точку. Значит, любой цикл двудольного графа имеет чётную длину.

Достаточность. Не теряя общности, можно рассматривать только связные графы. Пусть связный граф G не имеет циклов нечётной длины. Докажем, что граф G — двудольный.

Рассмотрим произвольную вершину v_0 и построим разбиение вершин графа G на два класса A и B следующим образом: к классу A отнесём вершину v_0 и любую вершину u, расстояние до которой от вершины v_0 чётное, к классу B отнесём все вершины, расстояние до которых от вершины v_0 нечётное. Для доказательства двудольности графа G осталось показать, что любые две вершины из множества A или любые две вершины из множества B не являются смежными.

Предположим противное. Пусть существуют две смежные вершины u и v, входящие в один класс. Тогда ни одна из этих вершин не совпадает с v_0, так как вершина v_0 принадлежит классу A, а все смежные с ней вершины — классу B. Пусть U — кратчайшая цепь, соединяющая v_0 и u, а V — кратчайшая цепь, соединяющая v_0 и v. Обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_p$ общие вершины цепей U и V, считая от вершины v_0.

Поскольку U и V — кратчайшие цепи, их части от вершины v_0 до вершины v_1 имеют одинаковые длины. То же самое можно сказать и о частях цепей U и V от любой вершины v_i до вершины v_{i+1}. Поэтому части цепей от вершины v_p до вершин u и v имеют одинаковые чётности. Но тогда объединение этих частей и ребра (u, v) является циклом нечётной длины, что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

Пример 4 (теорема о сумме степеней вершин долей двудольного графа). *Суммы степеней вершин долей двудольного графа равны.*

Решение. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — вершины одной доли, а $u_1, u_2, \ldots, u_p$ — вершины другой доли.

Тогда из одной доли выходит $d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_k)$ рёбер, а из другой — $d(u_1) + d(u_2) + \ldots + d(u_p)$ рёбер. Равенство этих сумм следует из того, что вершины долей являются разными концами одних и тех же рёбер. Теорема доказана.

Задачи

1. $\boxed{6\text{-}7}$ В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?

2. $\boxed{6\text{-}7}$ Каждый город одной страны соединён с каждым городом другой страны ровно одним авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Рейсов первой авиакомпании в 6 раз больше, чем рейсов второй. Сколько городов может быть в странах, если известно, что в каждой из них не больше 10 городов и в одной стране на один город больше, чем в другой?

3. $\boxed{6\text{-}7}$ В двух делегациях вместе 22 человека. При встрече члены одной делегации обменялись рукопожатиями с членами другой делегации. Всего было сделано 121 рукопожатие. Доказать, что в делегациях одинаковое число членов.

4. $\boxed{6\text{-}7}$ За столом сидят 5 мальчиков и 7 девочек, а на столе в вазе лежат конфеты. Некоторые из детей знакомы. Каждая девочка дала по конфете из вазы знакомому мальчику, а затем каждый мальчик дал по конфете из вазы незнакомой девочке. После этого в вазе не осталось конфет. Сколько конфет было в вазе?

5. $\boxed{6\text{-}7}$ Каждый город одной страны соединён авиарейсами более чем с половиной городов другой страны. Из-за забастовки авиадиспетчеров в странах внутренние авиарейсы были отменены и остались только международные. Доказать, что, пользуясь ими, можно добраться из любого города одной

страны в любой город этой же страны, сделав ровно одну пересадку.

6. (6-7) Каждый из учеников 9«а» класса дружит ровно с тремя учениками 9«б» класса, а каждый ученик 9«б» класса дружит ровно с тремя учениками 9«а» класса. Доказать, что число учеников в этих классах одинаково.

7. (6-7) В классе 12 мальчиков и 16 девочек. Каждая девочка дружит ровно с тремя мальчиками. Количество девочек, с которыми дружат мальчики, одинаково. Со сколькими девочками дружит каждый мальчик?

8. (6-7) Можно ли так нарисовать 5 горизонтальных и 4 вертикальных отрезка, чтобы каждый горизонтальный отрезок пересекался ровно с тремя вертикальными, а каждый вертикальный ровно с четырьмя горизонтальными?

9. (6-7) В двух странах вместе 11 городов. Между некоторыми городами разных стран открыты авиарейсы (не более одного между двумя городами). Известно, что один город соединён рейсами с семью, один — с пятью, пять — с двумя, четыре — с одним городом. Сколько городов в странах?

10. (6-7) В классе каждый мальчик дружит ровно с четырьмя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. В классе 16 парт, а на последней экскурсии было 23 школьника. Сколько учеников в классе?

11. (6-7) В школе, где учатся 6 друзей: Вася, Серёжа, Женя, Коля, Петя и Миша, работает несколько кружков. Известно, что каждый из кружков посещают пятеро из друзей, причём Вася посещает больше всех кружков — 8, а Миша меньше всех — 5. Сколько кружков в школе?

12. (6-7) В некоторой группе людей у каждого есть один враг и один друг. (Если A — друг (враг) B, то B — друг (враг) A.) Доказать, что этих людей можно разбить на две компании так, что в каждой компании не будет ни врагов, ни друзей.

13. (7) В стране несколько городов, некоторые пары из них соединены авиалиниями, причём для каждого города число городов, с которыми он соединён, не меньше четырёх. Доказать, что возможно путешествие с числом перелётов не менее пяти, которое начинается и заканчивается в одном городе, причём каждый промежуточный город будет посещаться только один раз.

14. $\boxed{7}$ На симпозиуме каждый учёный знаком хотя бы с одним из остальных учёных, но не со всеми. Доказать, что всех учёных можно разбить на две группы так, что каждый участник симпозиума будет знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

15. $\boxed{7}$ Маршруты № 1 и № 2 полицейских патрульных машин начинаются и заканчиваются, соответственно, на перекрёстках A и B (A не совпадает с B). Маршруты различаются, но каждый из них включает отрезок улицы между перекрёстками C и D и не содержит ни одного перекрёстка дважды. Доказать, что можно создать маршрут патрулирования № 3, который не будет включать отрезок (C, D) и не будет содержать ни одного перекрёстка дважды. Всегда ли можно так создать маршрут № 3, чтобы он проходил через перекрёстки C и D?

5. Деревья

Теоретический материал

В начале этого раздела будут даны задачи для 5 классов на общее понимание деревьев. Можно сначала работать без определений и теорем.

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов. Граф, в котором отсутствуют циклы, называется *лесом*.

Из определения дерева следует, что невозможно, передвигаясь по его рёбрам и не проходя по одному ребру два или более раз, вернуться в исходную вершину.

Висячей вершиной называется вершина, из которой выходит ровно одно ребро.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной простой цепью (простым путём), является деревом.

Решение. Очевидно, что данный граф связен. Предположим, что он не является деревом. Тогда, исходя из определения дерева, в нём есть цикл. Любые две вершины этого цикла соединены по крайней мере двумя простыми цепями (простыми путями). Получили противоречие, которое и доказывает наше утверждение.

> ***Замечание.*** Верно и обратное утверждение: в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путём (простой цепью).
>
> Это утверждение также легко доказывается от противного — если предположить, что существуют две вершины, которые соединены двумя различными простыми цепями, то тут же получим, что в дереве есть цикл, что противоречит определению дерева.

> ***Замечание.*** Исходя из доказанного выше, можно дать эквивалентное определение дерева:
> *Дерево* — это граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путём (простой цепью).

Пример 2 (лемма о висячей вершине). Доказать, что в любом дереве есть висячая вершина.

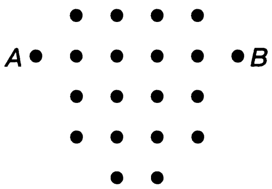
Решение. Рассмотрим произвольную вершину дерева и пойдём по любому выходящему из неё ребру в другую вершину. Если из новой вершины больше рёбер не выходит, то мы остаёмся в ней, а в противном случае идём по любому другому ребру дальше. Так как в дереве нет циклов, то мы никогда не сможем второй раз попасть в вершину, в которой уже побывали. Поскольку у графа конечное число вершин, наше путешествие обязательно должно закончиться. Но закончиться оно может только в висячей вершине.

Пример 3. Доказать, что в любом дереве число вершин на одну больше числа рёбер.

Решение. У любого дерева есть висячая вершина. Удалим её и выходящее из неё ребро. Оставшийся граф также будет деревом. У него есть висячая вершина, которую также удалим, и так далее. Повторяем эту операцию до тех пор, пока не получим граф, состоящий из одной вершины. Так как вершины и рёбра удаляли парами, то число вершин в дереве на одну больше числа рёбер.

Задачи

1. $\boxed{5}$ В доску вбито 20 гвоздиков (см. рисунок). Расстояние между соседними гвоздиками равно 1 см. Натяните нитку длиной 19 см от A до B так, чтобы она прошла через все гвоздики.



2. $\boxed{5}$ Сколько было брёвен, если, сделав 52 распила, из них получили 72 полена?

3. $\boxed{6\text{-}7}$ В землю вбили 19 колышков. Двое по очереди связывают пары колышков бечёвкой: каждым ходом — одну пару. Выигравшим считается игрок, при ходе которого образовалась замкнутая ломаная, составленная из бечёвок (вершинами ломаной должны быть колышки). Не разрешается связывать два уже ранее соединённых колышка. Кто выиграет при правильной игре?

4. $\boxed{5}$ Гриша пошёл с папой в тир. Уговор был такой: Гриша делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право сделать ещё два выстрела. Гриша выстрелил 17 раз. Сколько раз он попал в цель?

5. $\boxed{6\text{-}7}$ Всё началось с одной курицы, которая снесла два яйца. Из них вывелись цыплята: петух и курица. Когда они подросли, петуха съели, а курицу съели только после того, как она снесла два яйца. Так делали и дальше: из яиц выводили цыплят и так далее. Всё прекратилось, когда из яиц вылупились одни только петухи. Всего было съедено 1994 петуха. Сколько было кур?

6. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Имеется лист бумаги. Его можно разорвать на 5 частей. Каждый новый кусок можно разорвать на 5 частей или оставить целым и так далее. Можно ли получить таким образом 50 кусков?

   б) Если всякий лист можно рвать на 8 или 12 частей, выясните, можно ли из одного листа получить 60 кусков. Доказать, что любое число кусков, большее 60, получить можно.

7. [6-7] Можно ли расставить числа $1, 2, \dots, 9$ по кругу так, чтобы никакая сумма двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

8. [6-7] В графе все вершины имеют степень 3. Доказать, что в нём есть цикл.

9. [6-7] Доказать, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

10. [6-7] В стране Древляндия n городов, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

11. [6-7] Доказать, что связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является деревом.

12. [6-7] а) Волейбольная сетка — прямоугольник 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать, чтобы сетка не распалась?

    б) В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

13. [6-7] Доказать, что в любом связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным.

14. [6-7] По дорожкам парка «Лотос» можно зайти в любой его уголок, но нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую часть дорожки между двумя перекрёстками парка содержит не более одного раза. Доказать, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

15. [6-7] Администрация парка «Лотос» (см. предыдущую задачу) решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекрёсток и каждый тупик должны будут освещаться четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрёстка или перекрёсток и тупик, — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрёстков и тупиков?

16. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что между любыми двумя перекрёстками или тупиками парка «Лотос» (см. предыдущие задачи) существует единственный маршрут для прогулок, в котором нет повторяющихся дорожек.

17. $\boxed{6\text{-}7}$ В парке «Лотос-2» число перекрёстков и тупиков на единицу больше, чем число отрезков дорожек между перекрёстками и тупиками. Кроме того, по дорожкам парка можно зайти в любой его уголок. Доказать, что в парке нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более одного раза.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ В парке «Лотос-3» число перекрёстков и тупиков на единицу больше, чем число отрезков дорожек между перекрёстками и тупиками. Кроме того, в парке нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую часть дорожки между двумя перекрёстками парка содержит не более одного раза. Доказать, что в парке любые два перекрёстка или тупика соединены единственным маршрутом для прогулки.

6. Плоские графы

Теоретический материал

Граф называется *плоским*, или *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, что никакие его два ребра (за исключением рёбер, выходящих из общей вершины) не имеют общих точек.

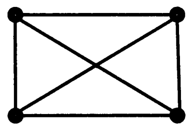
Гранью плоского графа называется максимальное множество точек плоскости, каждую пару из которых можно соединить кривой, не пересекающей рёбра графа. Грань, которая имеет бесконечную площадь, называется *внешней*, остальные грани называются *внутренними*.

В задачах будем использовать обозначения: n — число вершин, m — число рёбер, f — число граней графа.

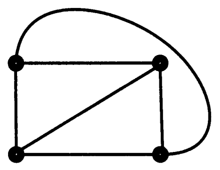
Граф, каждая вершина которого соединена ребром с любой другой вершиной, называется *полным*.

Примеры решения задач

Пример 1. Является ли граф, изображённый на рисунке, плоским?



Решение. Да, поскольку его можно нарисовать так:



Ответ. Да.

Замечание. Заметим, что рассматриваемый граф является полным графом с четырьмя вершинами.

Пример 2 (теорема Эйлера). Для всякого связного плоского графа верно равенство

$$n - m + f = 2,$$

где n — число вершин, m — число рёбер, f — число граней графа.

Решение. Будем удалять рёбра до тех пор, пока не получим дерево (вспомните задачи предыдущего раздела). Посмотрим, как при удалении очередного ребра изменяются величины n, m и f. Ясно, что число вершин не изменяется, а число рёбер уменьшается на 1. Число граней также уменьшается на 1, так как при удалении ребра две примыкающие к нему грани объединяются в одну грань.

Следовательно, при такой операции величина $n - m + f$ не изменяется. Так как для полученного дерева $n - m = 1$ и $f = 1$, то $n - m + f = 2$, и, значит, для исходного графа также выполняется это равенство.

Замечание. Равенство $n - m + f = 2$ обычно называют формулой Эйлера.

Пример 3. В стране 5 озёр, соединённых между собой 7 непересекающимися каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озёрами и каналами?

Решение. Представим карту озёр и каналов в виде графа. Вершинами графа будут озёра, а рёбрами — каналы. Поскольку каналы не пересекаются, полученный граф будет плоским, число вершин $n = 5$, число рёбер $m = 7$. Острова будут гранями этого графа. Так как от любого озера можно доплыть до любого другого, то граф будет связным и для него будет верна формула Эйлера: $n - m + f = 2$, где f — число граней графа. Из неё получаем, что $f = 2 + m - n = 2 + 7 - 5 = 4$. Поскольку внешняя грань не является островом, островов будет 3.

Ответ. Три острова.

Задачи

1. $\boxed{6\text{-}7}$ В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

2. $\boxed{6\text{-}7}$ В стране 7 озёр, соединённых между собой 11 непересекающимися каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озёрами и каналами?

3. $\boxed{6\text{-}7}$ Разумные муравьи с планеты Тямти-Лямти живут в колониях. Колонии состоят из ячеек, которые муравьи строят из палочек. В одной ячейке живёт один муравей. Каждая ячейка представляет собой многоугольник. Палочки соединяются между собой с помощью специального раствора, причём можно соединять только концы палочек. Известно, что для создания колонии муравьи использовали 58 палочек, которые скрепили в 30 местах. Сколько муравьёв живёт в колонии?

4. $\boxed{6\text{-}7}$ Внутри квадрата отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

5. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что для плоского графа верно неравенство $2m \geqslant 3f$.

6. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что для плоского связного графа, содержащего не менее трёх вершин, справедливо неравенство $m \leqslant 3n - 6$.

7. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что для плоского графа (в том числе и несвязного), содержащего не менее трёх вершин, справедливо неравенство $m \leqslant 3n - 6$.

8. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Доказать, что полный граф с пятью вершинами не является плоским.
б) Доказать, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, неплоский.

9. $\boxed{6\text{-}7}$ Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнёзда которой устанавливают электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, используют напылённые металлические дорожки. Поскольку проводники не изолируются, дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то одну из дорожек переносят на другую сторону платы. Инженер Иванов придумал хорошую схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, чтобы все проводники были расположены на одной её стороне?

10. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

11. $\boxed{6\text{-}7}$ Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Доказать, что по крайней мере один из графов — «красный» или «синий» — не является плоским.

12. $\boxed{6\text{-}7}$ Имеются три дома и три колодца. Каждый хозяин пользуется любым из трёх колодцев. В некоторый момент обитатели домов поссорились и решили проложить свои дорожки до колодцев так, чтобы дорожки не пересекались. Возможно ли это?

7. Ориентированные графы

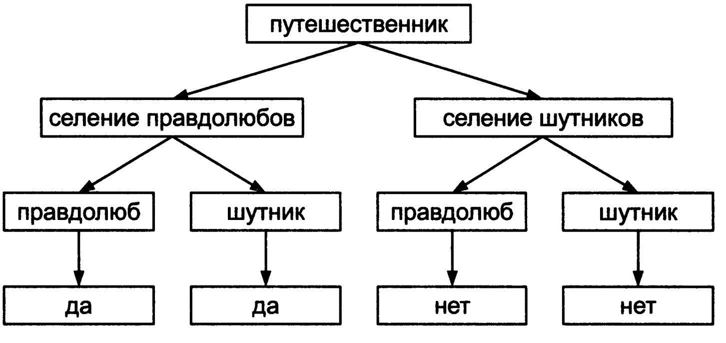
Теоретический материал

Граф, на рёбрах которого расставлены стрелки, называется *ориентированным* или *орграфом*.

Примеры решения задач

Пример 1. На острове отдельными селениями живут правдолюбы и шутники. Правдолюбы постоянно говорят правду, а шутники всегда лгут. Жители каждого племени могут бывать в селении другого племени. Доказать, что путешественнику, попавшему в селение, достаточно задать первому встречному вопрос: «Вы местный?», чтобы по ответу определить, в селении какого племени он находится.

Решение. У путешественника всего 4 возможности: он может оказаться в селении одного из двух племён, где ему может встретиться правдолюб или шутник. Нарисуем ориентированный граф (дерево ответов), который будет описывать эти возможности и ответы, полученные в каждом из случаев.



Из рисунка видно, что в случае ответа встреченного аборигена «да» путешественник находится в селении правдолюбов, а в случае ответа «нет» — в селении шутников.

Пример 2. В одной стране каждый город соединён с каждым городом дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

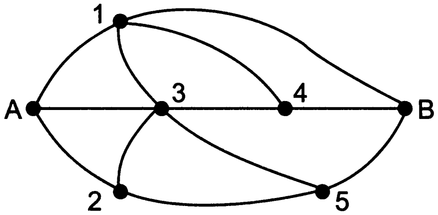
Решение. Занумеруем города и направим движение от городов с меньшими номерами к городам с большими номерами. При такой организации одностороннего движения, выехав из города, вернуться в него не удастся.

Ответ. Можно.

Замечание. Заметим, что из города с самым большим номером даже выехать не удастся.

Задачи

1. 6-7 Из города A в город B ведут несколько дорог (карту дорог см. на рисунке). Найдите число маршрутов автомобильного путешествия из A в B, учитывая, что при движении автомобиль должен всё время приближаться к B.



2. 6-7 В стране 101 город. Города соединены дорогами с односторонним движением так, что два города соединены не более чем одной дорогой. Из любого города выходит ровно 50 дорог, и в любой город входит ровно 50 дорог. Доказать, что из любого города в любой другой можно попасть, проехав не более двух дорог.

3. 6-7 В стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, а в каждый такой город входит 21 дорога. Доказать, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

4. 6-7 Доказать, что на рёбрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

5. 6-7 Можно ли записать цифры от 0 до 9 в строку так, чтобы число, составленное из любых двух подряд идущих цифр, делилось на 7 или на 13?

6. $\boxed{6\text{-}7}$ В волейбольном турнире проведено несколько матчей, после чего у каждой команды оказалась хотя бы одна победа. Доказать, что из сыгранных матчей можно выбрать несколько так, что если учитывать только эти матчи, то у каждой команды, принимающей участие в них, будет ровно одна победа и одно поражение.

7. $\boxed{6\text{-}7}$ Город Зурбаган ограничен кольцевой дорогой. Все улицы начинаются и кончаются на этой дороге и никакие две улицы не имеют двух различных пересечений. Части, на которые улицы разбивают город, называются микрорайонами. В городе ввели одностороннее движение по всем улицам и кольцевой дороге. Доказать, что хотя бы один микрорайон можно объехать вокруг, не нарушив правил движения.

8. $\boxed{7}$ На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Доказать, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

9. $\boxed{7}$ По кругу записаны 7 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Доказать, что найдётся пара и несоседних чисел с таким же свойством.

10. $\boxed{7}$ В дискуссии приняли участие 15 депутатов. Каждый из них в своём выступлении раскритиковал ровно k из оставшихся 14 депутатов. При каком наименьшем k можно утверждать, что найдутся два депутата, которые раскритиковали друг друга?

11. $\boxed{7}$ В компанию из n человек пришёл журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек Z, который знает всех остальных членов компании, но его не знает никто. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом: «Знаете ли вы такого-то?»

    а) Может ли журналист установить, кто из компании есть Z, задав менее n вопросов?

    б) Найти наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти Z, и доказать, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

    (Все отвечают на вопросы правдиво. Одному человеку можно задавать несколько вопросов.)

Часть II. **УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ**

1. Вводные задачи

Задача 1

$\boxed{5\text{-}6}$ Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озёр, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Доказать, что он ошибается.

Идея. У каждой реки один исток и одно устье без протоков и рукавов.

Указание. Показать, что общее количество рек, вытекающих из озёр, должно совпадать с количеством рек, впадающих в озёра.

Решение. Озёра во Врунляндии соединены реками. Из условия задачи не следует, что устья рек в системе озёр имеют несколько рукавов или протоков. Значит, количество рек, вытекающих из всех озёр, должно совпадать с количеством рек (потоков), впадающих во все озёра.

По словам Димы, из озёр вытекают $3n$ рек, где n — количество озёр, а впадают в озёра $4n$ рек. Поскольку $3n \neq 4n$ при $n \neq 0$, Дима ошибается.

Утверждение доказано.

Замечание. Систему озёр с соединяющими их реками можно представить в виде графа, описывающего перемещение воды.

Задача 2

$\boxed{5\text{-}6}$ Школьный драмкружок, готовясь к постановке отрывка из сказки А. С. Пушкина о царе Салтане, решил распределить роли между участниками.

— Я буду Черномором, — сказал Юра.

— Нет, Черномором буду я, — заявил Коля.

— Ладно, — уступил ему Юра, — я могу сыграть Гвидона.

— Ну, я могу стать Салтаном, — тоже проявил уступчивость Коля.

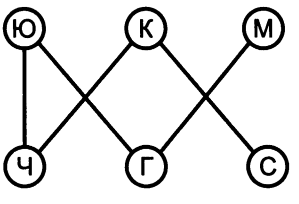
— Я же согласен быть только Гвидоном! — произнёс Миша.

Желания мальчиков были удовлетворены. Как распределились роли?

Идея. Построить граф распределения ролей.

Указания. 1) В качестве вершин графа взять начальные буквы имён школьников и литературных персонажей.
2) Соединить рёбрами вершины графа в соответствии с пожеланиями школьников.
3) Выбрать единственно возможное распределение ролей.

Решение. Построим граф распределения ролей. Он состоит из шести вершин, названных первыми буквами имён актёров и литературных героев {Ю, К, М, Ч, Г, С}, и рёбер, отражающих пожелания участников постановки {(Ю; Ч), (Ю; Г), (К; Ч), (К; С), (М; Г)}.



Так как степень вершины С (Салтан) равна единице (вершина С *висячая*), роль Салтана достаётся Коле. Тогда Черномора сможет играть только Юра, а Миша будет Гвидоном.

Ответ. Коля — Салтан, Юра — Черномор, Миша — Гвидон.

Задача 3

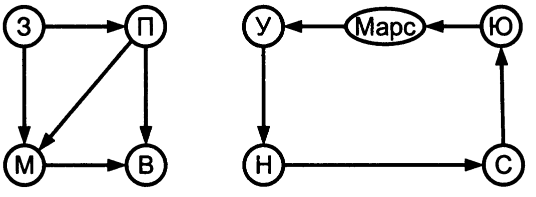
5-6 Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля—Меркурий, Плутон—Венера, Земля—Плутон, Плутон—Меркурий, Меркурий—Венера, Уран—Нептун, Нептун—Сатурн, Сатурн—Юпитер, Юпитер—Марс и Марс—Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Идея. Построить ориентированный граф маршрутов космических ракет.

Указания. 1) Вершины графа обозначить начальными буквами названий планет (планету Марс обозначить четырьмя буквами); направленные рёбра — маршруты ракет.

2) Выделить два несвязных подграфа и сделать вывод о возможности путешествия от Земли до Марса.

Решение. Изобразим схему межпланетных перелётов в Солнечной системе с помощью ориентированного графа маршрутов космических ракет. Граф содержит 9 вершин, которым присвоены имена, совпадающие с первыми буквами названий планет, за исключением вершины, соответствующей планете Марс. Направленные рёбра графов показывают маршруты космических ракет.



Построенный граф состоит из двух *подграфов*, не связанных между собой. Планеты Земля и Марс находятся в разных подграфах, поэтому добраться с Земли до Марса нельзя.

Ответ. Нет.

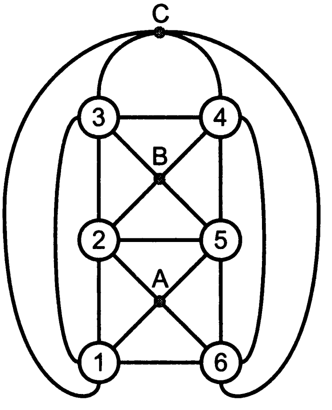
Задача 4

6-7 Король хочет построить шесть крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения крепостей и дорог, чтобы на ней было только три перекрёстка и на каждом из них пересекались две дороги.

Идея. Построить граф дорог, связывающих шесть крепостей, с тремя пересечениями рёбер.

Указания. 1) Вершины графа задают крепости; из каждой вершины должны выходить пять рёбер.
2) Разместить рёбра так, чтобы число пересечений рёбер в графе было равно трём.

Решение. На языке теории графов задача состоит в построении графа с шестью вершинами $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, обозначающими крепости, и рёбрами (дорогами) $\{(1;2)$, $(1;3)$, $(1;4)$, $(1;5)$, $(1;6)$, $(2;3)$, $(2;4)$, $(2;5)$, $(2;6)$, $(3;4)$, $(3;5)$, $(3;6)$, $(4;5)$, $(4;6)$, $(5;6)\}$, соединяющими каждые две вершины и имеющими только три *пересечения*.



На рисунке изображён граф, обладающий нужными свойствами. Из каждой из шести его вершин выходят пять рёбер. Рёбра пересекаются в трёх точках A, B и C.

Задача 5

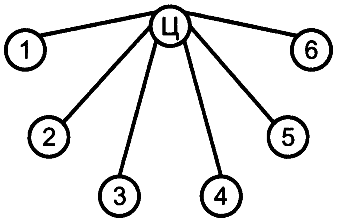
6-7 Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

Идея. Предложить вариант планировки города, который соответствует условию (например, радиальная или лучевая).

Указания. 1) Рассмотреть город с лучевой планировкой улиц.
2) Построить граф улиц города.
3) Изучить маршруты передвижения.

Решение. Условию задачи соответствует, например, радиальная или лучевая планировка города.

Рассмотрим лучевую планировку, при которой все улицы города расходятся от центральной площади веером. На рисунке изображён граф веерного расположения улиц. Рёбра графа соответствуют улицам города. Все рёбра выходят из вершины Ц, которая обозначает центральную площадь. Вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6 отмечают конец каждой из шести улиц.



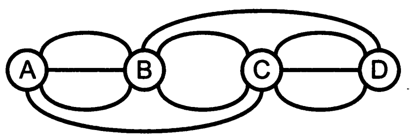
Для того чтобы обойти все улицы города, пройдя по ним дважды, пешеход должен начать путешествие с центральной площади (из узла Ц). При этом ему придётся дойти до конца каждой улицы и вернуться на центральную площадь.

Поскольку улицы не соединены кольцевыми хордами, пешеход не может обойти все улицы, пройдя каждую только один раз.

Ответ. Да.

Задача 6

6-7 Города A, B, C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке. Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D, побывав в каждом городе ровно по одному разу?



Идея. Возможен разный порядок посещения городов.

Указания. 1) Рассмотреть маршруты, в которых города посещаются в порядке $A \to B \to C \to D$. Учесть все возможные дороги, соединяющие пары городов.
2) Рассмотреть маршруты, в которых города посещаются в порядке $A \to C \to B \to D$.

Решение. Попасть из города A в город D, посетив по пути города B и C и побывав в каждом городе только один раз, можно несколькими способами. Маршруты отличаются выбором дорог и порядком посещения городов.

1) Рассмотрим маршруты, в которых города посещаются в следующей последовательности: $A \to B \to C \to D$. Из города A в город B можно проехать по трём дорогам; из B в C ведут две дороги; из C в D ведут три дороги. Значит, проехать из A в D, придерживаясь указанного порядка посещения городов, можно $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ способами.

2) Города B и C можно посетить и в обратной последовательности: сначала C, а затем B. Из A в C ведёт только одна дорога; из C в B ведут две дороги; из B в D есть единственная дорога. Значит, проехать из A в D, придерживаясь второго порядка посещения городов, можно $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ способами.

Всего существует $18 + 2 = 20$ способов проделать путь из города A в город D, побывав в каждом из четырёх городов A, B, C и D ровно по одному разу.

Ответ. 20 способами.

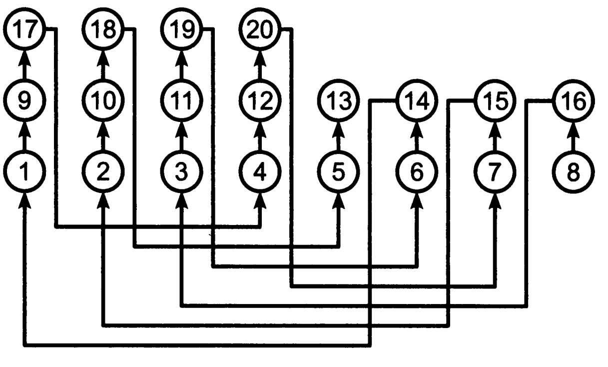
Задача 7

6-7 В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью этого лифта попасть с 20-го этажа на 1-й? (Когда сверху меньше 8 этажей, лифт вверх не пойдёт. Аналогично — вниз.)

Идея. Построить ориентированный граф передвижения лифта.

Указания. 1) Вершинам графа поставить в соответствие этажи дома.
2) Соединить вершины направленными рёбрами в соответствии со схемой движения испорченного лифта.
3) Провести анализ маршрута, начинающегося в вершине 20.

Решение. Построим ориентированный граф возможного передвижения пассажира на испорченном лифте.



Движение вверх на лифте возможно с этажей $1, 2, \ldots, 12$. Движение вниз возможно с этажей $14, 15, \ldots, 20$. С 20-го этажа лифт пойдёт по следующему маршруту:

$$20 \to 7 \to 15 \to 2 \to 10 \to 18 \to 5 \to 13.$$

Вершина 13 является *висячей* (её степень равна 1). Значит, попасть с 20-го этажа на 1-й на лифте нельзя. Можно либо доехать с 20-го на 2-й этаж и затем спуститься на 1-й этаж по лестнице, либо спуститься по лестнице на 19-й этаж и воспользоваться лифтом.

Ответ. Нет.

Задача 8

6-7 Лифт в 100-этажном доме имеет две кнопки: «+7» и «−9». (Первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9.) Можно ли проехать:

а) с 1-го на 2-й этаж;
б) со 2-го на 1-й этаж;
в) с любого на любой этаж?

Идея. Существуют маршруты перемещений на лифте на один этаж вверх или вниз.

Указания. а) Выполнить 4 подъёма на семь этажей и 3 спуска на девять этажей.
б) Выполнить 5 подъёмов на семь этажей и 4 спуска на девять этажей.
в) Показать, что пассажир всегда может спуститься или подняться на лифте на один этаж.

Решение. Изображать граф перемещений лифта небоскрёба нецелесообразно из-за большого числа вершин и маршрутов. Мы покажем, что существуют маршруты, удовлетворяющие условию задачи.

а) Подняться с 1-го на 2-й этаж на лифте можно. Для этого достаточно 4 раза нажать кнопку «+7» и 3 раза нажать кнопку «−9»:

$$1 \to 8 \to 15 \to 22 \to 29 \to 20 \to 11 \to 2.$$

б) Спуститься со 2-го этажа на 1-й на лифте также можно. Достаточно 5 раз нажать кнопку «+7» и 4 раза нажать кнопку «−9»:

$$2 \to 9 \to 16 \to 23 \to 30 \to 37 \to 28 \to 19 \to 10 \to 1.$$

в) Заметим, что независимо от начала маршрута всегда есть возможность подняться на лифте на один этаж (со всех этажей, кроме 100-го) и спуститься на лифте на один этаж (со всех этажей, кроме 1-го). Для этого можно воспользоваться схемами, рассмотренными в пунктах а) и б), при необходимости меняя порядок нажатия кнопок, но сохраняя общее число нажатий кнопок каждого вида.

Значит, пассажир может переместиться на лифте с любого этажа на любой этаж, последовательно реализуя перемещения на один этаж в нужном направлении.

Ответ. а) Да; б) да; в) да.

Задача 9

6-7 По столбу высотой 15 метров ползёт улитка. За день она поднимается на 4 метра, за ночь опускается на 3 метра. Через какое время она достигнет вершины столба?

Идея. Составить схему передвижения улитки по столбу.

Указание. Рассмотреть маршрут улитки, делая отметки высот при достижении наибольшего и наименьшего уровней в течение суток.

Решение. Построим схему передвижения улитки по столбу, отмечая наивысшее и наинизшее её положения в течение суток:

1-й день: $0 \to 4$; 1-я ночь: $4 \to 1$;
2-й день: $1 \to 5$; 2-я ночь: $5 \to 2$;
3-й день: $2 \to 6$; 3-я ночь: $6 \to 3$;
...
11-й день: $10 \to 14$; 11-я ночь: $14 \to 11$;
12-й день: $11 \to \mathbf{15}$.

Улитка достигнет вершины столба к вечеру 12-го дня.

Ответ. К вечеру 12-го дня.

Задача 10

6-7 32 теннисиста играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). За какое наименьшее количество встреч можно определить победителя?

Идея. После каждой встречи выбывает один участник.

У к а з а н и е. Определить, сколько встреч необходимо провести, чтобы остался единственный участник.

Р е ш е н и е. В олимпийской системе после каждой игры выбывает один спортсмен. Поскольку по условию в турнире принимают участие 32 теннисиста, единственный участник (победитель) останется после 31 встречи.

О т в е т. За 31 встречу.

Задача 11

6-7 32 теннисиста играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). За какое наименьшее количество встреч можно определить двух сильнейших теннисистов?

И д е я. Второй сильнейший теннисист мог выбыть из турнира, если играл с будущим победителем.

У к а з а н и я. 1) Для определения второго сильнейшего теннисиста рассмотреть партнёров будущего победителя во всех пяти турах турнира.
2) Выбрать из них победителя за 4 встречи, используя олимпийскую систему.

Р е ш е н и е. Рассмотрим турнир подробно. При 32 участниках выбор победителя будет проведён в 5 туров за 31 встречу.

1. В первом туре будут сыграны 16 матчей; 16 теннисистов выбывают; после 1-го тура останутся 16 участников.
2. Во 2-м туре будут сыграны 8 матчей; после 2-го тура останутся 8 теннисистов.
3. В 3-м туре будут сыграны 4 матча; останутся 4 участника.
4. В 4-м туре будут сыграны 2 матча; останутся 2 участника.
5. В последнем 5-м туре должен быть сыгран 1 матч и определён победитель.

Второй сильнейший теннисист мог дойти до пятого тура, но мог и выбыть из турнира, если в одном из первых четырёх туров играл с будущим победителем. Поэтому для определения второго сильнейшего игрока необходимо провести встречи тех участников, которые играли с будущим победителем в 1 – 5 турах. Таких участников пять. Самого сильного из них можно выбрать, используя олимпийскую систему, за 4 игры.

Значит, для определения двух сильнейших теннисистов из 32 необходимо провести $31 + 4 = 35$ встреч.

О т в е т. За 35 встреч.

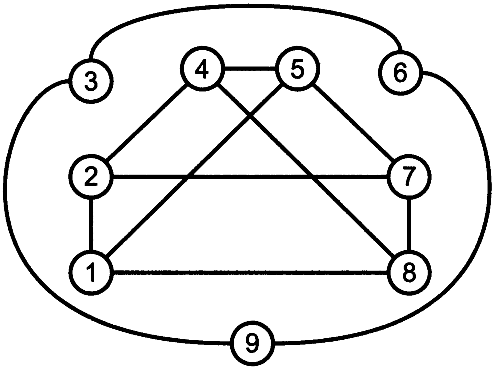
Задача 12

6-7 В стране Цифра есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться самолётом из города 1 в город 9?

Идея. Построить граф авиаперелётов в стране Цифра.

Указания. 1) Вершины графа — города, рёбра — авиалинии.
2) Выделить в графе два несвязанных подграфа.

Решение. Составим граф авиаперелётов в стране Цифра. Вершинам графа соответствуют города, рёбрам — авиалинии. Вершина 1 соединена рёбрами с вершинами 2, 5 и 8; вершина 2 соединена рёбрами с вершинами 1, 4 и 7; вершина 3 соединена рёбрами с вершинами 6 и 9; вершина 4 соединена рёбрами с вершинами 2, 5 и 8 и так далее. Заметим, что если две вершины соединены ребром, то авиаперелёты возможны в двух направлениях.



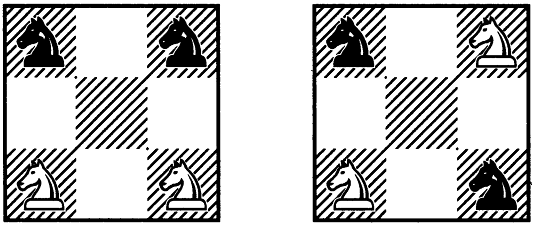
Построенный граф состоит из двух не связанных между собой *подграфов*. Вершины 1 и 9 находятся в разных подграфах, поэтому добраться самолётом из города 1 в город 9 нельзя.

Ответ. Нет.

Замечание. Другой подход к решению задачи состоит в использовании свойств делимости натуральных чисел. Поскольку число 1 при делении на 3 даёт остаток 1, город 1 связан авиасообщением с городами, номера которых при делении на 3 дают остаток 2, а они, в свою очередь, связаны авиасообщением с городами, номера которых при делении на 3 дают остаток 1. Число 9 кратно трём, поэтому перелёт из 1 в 9 невозможен.

Задача 13

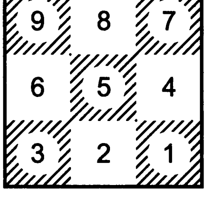
6-7 Можно ли, сделав несколько ходов конями из положения на рисунке слева, расположить их так, как показано на рисунке справа?



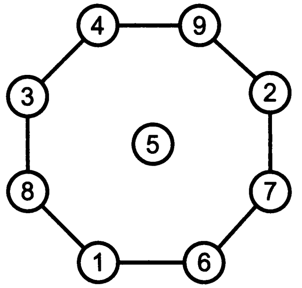
Идея. Построить граф перемещений фигуры коня на рассматриваемой части шахматной доски.

Указания. 1) Пронумеровать клетки шахматной доски.
2) Соединить вершины графа рёбрами, принимая во внимание правила игры в шахматы.
3) Расставить на графе фигурки коней в исходном положении и проанализировать возможные маршруты перемещения фигур.

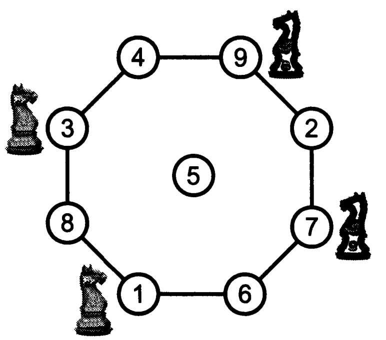
Решение. Пронумеруем клетки шахматной доски по схеме, изображённой на рисунке.

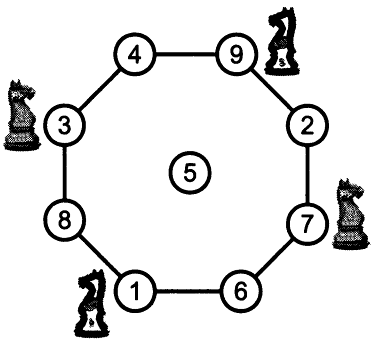


Изобразим граф возможных перемещений коня. Заметим, что если две вершины графа соединены ребром, то перемещение коня возможно в обоих направлениях.



На рисунках ниже показана исходная расстановка фигур (слева) и требуемая расстановка (справа). Порядок следования коней (два белых и два чёрных) не может измениться при сохранении общего количества фигур на доске. Значит, получить требуемую расстановку фигур нельзя.

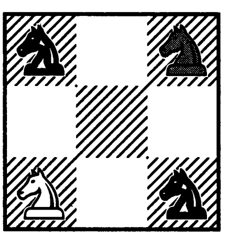




Ответ. Нет.

Задача 14

[6-7] Заменим на втором рисунке задачи 13 одного из белых коней красным. Как поменять местами белого и красного коней за наименьшее число ходов?

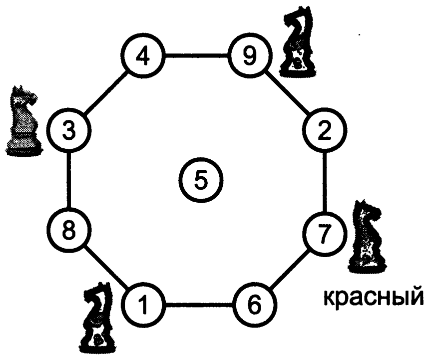


Идея. Использовать граф перемещений фигуры коня на рассматриваемой шахматной доске.

Указания. 1) Пронумеровать клетки шахматной доски.
2) Соединить вершины графа рёбрами в соответствии с правилами хода коня.
3) Расставить на графе фигурки коней в исходном положении и проанализировать возможные маршруты перемещения фигур.

Решение. Пронумеруем клетки шахматной доски и построим граф возможных перемещений коня (см. иллюстрации к задаче 13).

Изобразим на графе исходную расстановку фигур. Необходимо поменять местами белого и красного коней, то есть переместить белого коня в вершину 7, а красного коня — в вершину 3. При этом в вершинах 1 и 9 должны остаться чёрные кони.

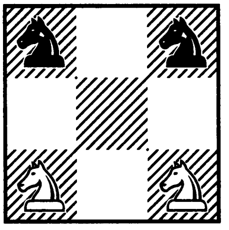


Для получения требуемой расстановки каждый конь должен сделать 4 хода в одном направлении: либо по ходу часовой стрелке, либо против хода часовой стрелки. Все шахматные фигуры сделают 16 ходов.

Поскольку $4 \cdot 4 = 16$, переставить нужным образом фигуры за меньшее число ходов невозможно.

Задача 15

6-7 Имеется шахматная доска 3×3, в верхних двух её углах стоят два чёрных коня, в нижних — два белых. За 16 ходов поставьте белых коней на место чёрных, а чёрных — на место белых и докажите, что за меньшее число ходов это сделать невозможно.



Идея. Использовать граф перемещений фигуры коня на рассматриваемой шахматной доске.

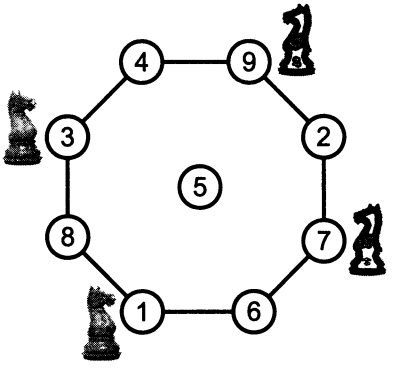
Указания. 1) Перенумеровать клетки шахматной доски.

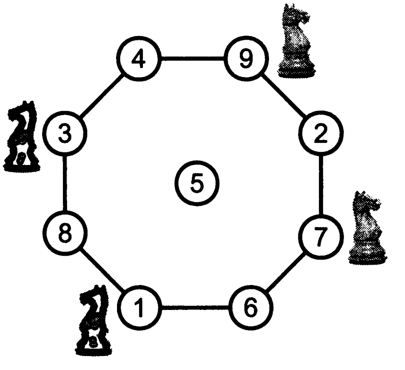
2) Соединить вершины графа рёбрами в соответствии с правилами игры в шахматы.

3) Расставить на графе фигурки коней в исходном и требуемом положении и проанализировать возможные маршруты перемещения фигур.

Решение. Перенумеруем клетки шахматной доски и построим граф возможных перемещений коня (см. иллюстрации к задаче 13).

Изобразим на графе исходную расстановку фигур (рисунок слева) и требуемую расстановку (рисунок справа).





Для получения требуемой расстановки за 16 ходов каждый конь должен сделать 4 хода, при этом все фигуры должны поочерёдно передвигаться по графу в одном направлении: либо по ходу часовой стрелки, либо против хода часовой стрелки.

Поскольку $4 \cdot 4 = 16$, переставить нужным образом фигуры за меньшее число ходов невозможно.

Задача 16

6-7 Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти её ходом коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

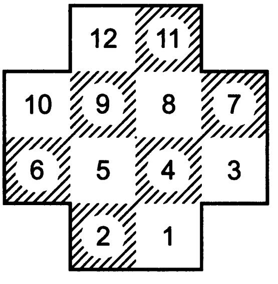
Идея. Построить граф перемещений фигуры коня на рассматриваемой шахматной доске.

Указания. 1) Пронумеровать клетки доски.

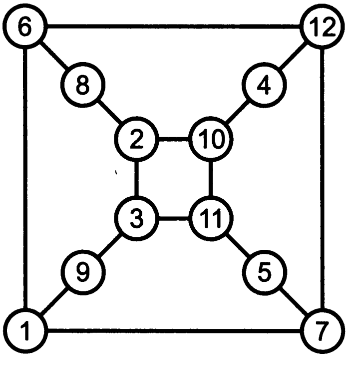
2) Соединить вершины графа рёбрами в соответствии с правилами хода коня.

3) Проанализировать возможные маршруты обхода конём всех клеток доски.

Решение. Пронумеруем клетки рассматриваемой доски так, как показано на рисунке.



Изобразим граф возможных перемещений коня. При построении графа предполагалось, что конь может перескакивать не только через фигуры, но и через отсутствующие угловые клетки шахматной доски.



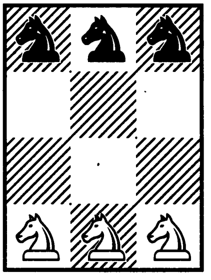
Можно предложить несколько маршрутов обхода всех клеток доски конём, начинающихся и заканчивающихся в одной вершине, например:

$$1 \to 6 \to 8 \to 2 \to 10 \to 4 \to 12 \to 7 \to 5 \to 11 \to 3 \to 9 \to 1.$$

Ответ. Можно.

Задача 17

6-7 Имеется шахматная доска 3×4, в верхних трёх её клетках стоят три чёрных коня, в нижних — три белых. За наименьшее число ходов поменяйте местами трёх белых и трёх чёрных коней.



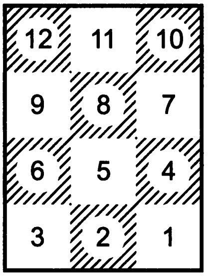
Идея. Построить граф перемещений фигуры коня на рассматриваемой шахматной доске.

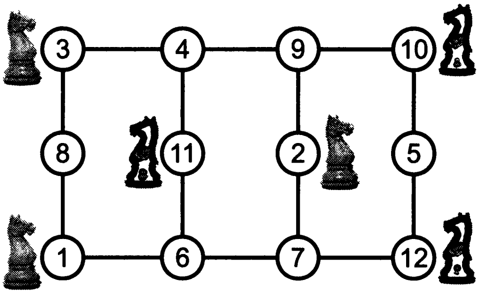
Указания. 1) Пронумеровать клетки шахматной доски.

2) Соединить вершины графа рёбрами в соответствии с правилами хода коня.

3) Расставить на графе фигурки коней в исходном положении и проанализировать возможные маршруты перемещения фигур.

Решение. Пронумеруем клетки шахматной доски и построим граф возможных перемещений коня, на котором отобразим начальную расстановку фигур.





Необходимо за наименьшее число ходов в вершинах 1, 2, 3 разместить чёрных коней, а в вершинах 10, 11, 12 — белых коней.

Подсчитаем минимальное число ходов для белых коней. Чтобы переместить белого коня с поля 3 на поле 11, требуется два хода, с поля 2 на поле 10 — также два хода, с поля 1 на поле 12 — три хода; итого 7 ходов.

Рассуждая аналогично, получим, что для перемещения чёрных коней с полей 10, 11, 12 на поля 2, 3, 1 соответственно потребуется также 7 ходов.

Реализовать эти перемещения сразу невозможно. Чтобы освободить вершину 3 для чёрного коня 11, белому коню необходимо пройти маршрут $3 \to 4 \to 9$, пропустить чёрного коня к вершине 3, вернуться на один шаг и занять клетку 11. Значит, белый конь должен сделать на два шага больше, и нужная перестановка фигур на шахматной доске может быть выполнена за 16 ходов:

белый: $3 \to 4 \to 9$;
чёрный: $11 \to 4 \to 3$;
белый: $1 \to 6 \to 11$;
чёрный: $12 \to 7 \to 6 \to 1$;
белый: $2 \to 7 \to 12$;
белый: $9 \to 4$;
чёрный: $10 \to 9 \to 2$;
белый: $4 \to 9 \to 10$.

Ответ. 16 ходов.

Задача 18

6-7 Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой из них было а) чётное; б) нечётное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если они имеют общую сторону.)

Идея. Общее число соседей у любого числа закрашенных клеток является чётным числом.

Указания. а) Привести пример.
б) Рассмотреть общее число соседей у закрашенных клеток. Показать, что оно должно быть чётным числом.

Решение. а) На приведённых ниже рисунках у каждой закрашенной клетки либо 2, либо 4 закрашенных соседа (чётное число).

[redacted]

на любую станцию, предшествующую той, на которой находится пассажир. На ориентированном графе движения поездов соответствующие вершины не будут соединены ни одним маршрутом.

2) Если по кольцевой линии движение поездов осуществляется в двух направлениях, то ремонт любой станции с перекрытием движения не скажется на доступности для пассажиров остальных станций метрополитена.

3) Далее рассмотрим схему метрополитена, содержащую радиальные и, возможно, кольцевые линии, по которым движение организовано в двух направлениях. Закрытие на ремонт одной из станций не повлияет на доступность остальных в одном из двух случаев: а) если ремонтируемая станция принадлежит радиальной линии, и только ей, и является на ней конечной; на языке теории графов это означает, что вершина, соответствующая ремонтируемой станции, должна быть *висячей* (вершиной степени 1); б) если ремонтируемая станция находится на кольцевой линии, и только на ней.

4) Наконец, если при наличии радиальных и кольцевых линий движение на последних одностороннее, на ремонт можно закрыть одну из конечных станций радиальных линий, не являющихся станциями пересадки на кольцевые линии.

Ответ. Двустороннее движение на радиальных линиях или на кольцевой линии при наличии только кругового движения.

Задача 20

6-7 Доказать, что из любых шести человек всегда найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых между собой.

Идея. Из пяти человек всегда найдутся трое, либо знакомые с вами, либо не знакомые.

Указания. 1) Рассмотреть одного человека из шести.
2) Выбрать из оставшихся пяти либо троих, знакомых с первым, либо троих, не знакомых с первым.
3) Показать, что среди четырёх выбранных персонажей найдутся трое, удовлетворяющие условию.

Решение. Рассмотрим шесть человек A, B, C, D, E, F. Персонаж A имеет среди пяти остальных человек либо троих знакомых, либо троих незнакомых.

В первом случае, не ограничивая общности, будем считать знакомыми персонажа A персонажей B, C, D. Если хотя бы два из них знакомы между собой (например, B и C), то мы получаем тройку попарно знакомых между собой людей: A, B, C. Если же персонажи B, C, D попарно незнакомы, то мы получаем тройку попарно незнакомых между собой людей: B, C, D.

Во втором случае, также не ограничивая общности, будем считать персонажей D, E, F не знакомыми с персонажем A. Если хотя бы два из них не знакомы между собой (например, D и E), то мы получаем тройку попарно незнакомых между собой людей: A, D, E. Если персонажи D, E, F попарно знакомы, то мы получаем тройку попарно знакомых между собой людей: D, E, F.

Утверждение доказано.

Задача 21

$\boxed{6\text{-}7}$ Шахматный турнир проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Лёша и Дима — по три, Семён и Илья — по две, Женя — одну. С кем сыграл Лёша?

Идея. Составить граф встреч школьников в шахматном турнире.

Указания. 1) Обозначить вершины графа первыми буквами имён игроков.
2) Соединить вершины рёбрами, рассматривая последовательно вершины В, Ж, Т, И, С, Л и Д.

Решение. Составим граф встреч семи игроков. Обозначим вершины начальными буквами имён мальчиков. Две вершины будут соединены ребром, если соответствующие участники играли друг с другом. Задача — правильно соединить вершины рёбрами.

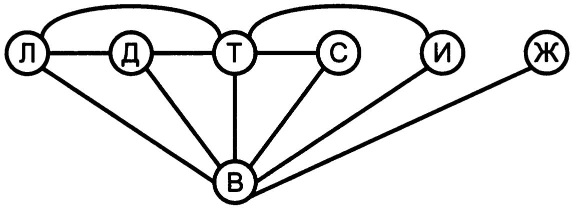
Поскольку Ваня сыграл 6 партий, вершину В соединяем рёбрами с шестью остальными вершинами.

Женя сыграл одну партию (с Ваней), поэтому к вершине Ж другие рёбра не подходят.

Так как Толя сыграл 5 партий, вершину Т соединяем рёбрами с вершинами Л, Д, С, И. Теперь к вершинам И и С подходит по 2 ребра.

Остались Лёша и Дима. Поскольку по условию они сыграли по 3 партии, они играли друг с другом.

Из графа следует, что Лёша сыграл с Ваней, Димой и Толей.



Ответ. С Ваней, Димой и Толей.

Задача 22

6-7 В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 5 школьников, сыграно 6 партий. Больше всех встреч провели Ваня и Миша — по 3. Какое число партий сыграл участник, проведший наименьшее количество встреч?

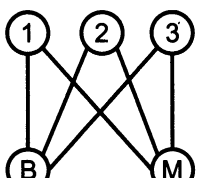
Идея. Составить граф встреч школьников в шахматном турнире.

Указания. 1) Обозначить вершины графа первыми буквами имён двух игроков и номерами 1, 2, 3 для оставшихся трёх игроков.
2) Рассмотреть случай: Ваня и Миша не играли друг с другом.
3) Рассмотреть случай: Ваня и Миша играли друг с другом.

Решение. Составим граф встреч пяти игроков. Обозначим вершины символами 1, 2, 3, В, М. Две вершины будут соединены ребром, если соответствующие участники играли друг с другом.

Возможны два случая: Ваня и Миша либо не играли друг с другом, либо играли друг с другом.

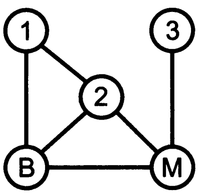
1) Если Ваня и Миша не играли друг с другом, то они сыграли партии с каждым из остальных трёх игроков и провели в сумме шесть партий. Значит, участники с номерами 1, 2 и 3 сыграли по 2 партии.



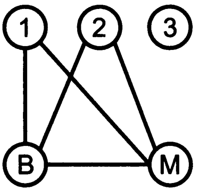
2) Предположим, что Ваня и Миша играли друг с другом. Если при этом один из игроков с номерами 1, 2 или 3 провёл

единственную встречу, то другой должен был провести три встречи (рисунок слева), что противоречит условию.

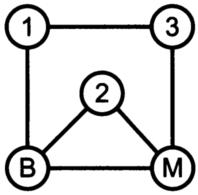
Не соответствует условию и случай, когда Миша и Ваня играли друг с другом и с одинаковыми противниками (рисунок в центре). Добавление шестого ребра к графу увеличит число рёбер по крайней мере одной вершины из множества $\{1, 2, \text{В}, \text{М}\}$, что противоречит условию.



противоречит условию



противоречит условию



не противоречит условию

Если же Ваня провёл партии с Мишей и с игроками 1 и 2, а Миша — с Ваней и с игроками 2 и 3, то шестая партия могла состояться только между игроками 1 и 3 (рисунок справа). В этом случае наименьшее количество партий участников турнира также равно двум.

Ответ. 2 партии.

Задача 23

6-7 Спортивный турнир проводится по круговой системе. Доказать, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, проведшие одинаковое число встреч.

Идея. Не существует графа турнира по круговой схеме с вершинами, имеющими разные степени.

Указания. 1) Использовать метод доказательства от противного.

2) Предположить, что степени всех вершин графа некоторого турнира различны.

3) Рассмотреть вершины наименьшей степени и наибольшей степени; получить противоречие.

Решение. Представим турнир с помощью графов встреч игроков в динамике. Вершины соответствуют игрокам, их может быть произвольное фиксированное число. Рёбра в каждый момент времени соответствуют проведённым играм.

Для решения задачи нужно показать, что в любой момент времени в графе проведённых встреч найдутся две вершины, степени которых одинаковы, то есть существуют два игрока, которые провели одинаковое количество встреч.

Пусть граф содержит n вершин. Заметим, что текущий граф проведённых встреч может быть произвольным (при фиксированном числе вершин). Предположим, что степени всех вершин различны и принимают n значений из множества $\{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$. Вершина степени 0 не соединена ребром ни с одной другой вершиной. Вершина степени $n-1$ соединена рёбрами со всеми остальными вершинами, в том числе и с вершиной степени 0.

Полученное противоречие означает, что предположение было неверным и в любой момент времени найдётся хотя бы одна пара игроков, которые провели одинаковое число встреч.

Утверждение доказано.

Задача 24

6-7 На плоскости расположено конечное число точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками. Доказать, что существуют две точки, из которых выходит одно и то же число отрезков.

Идея. В графе найдётся хотя бы одна пара вершин, имеющих равные степени.

Указания. 1) Построить граф чертежа.
2) Провести доказательство методом от противного.
3) Предположить, что степени всех вершин графа различны.
4) Рассмотреть вершины наименьшей степени и наибольшей степени; получить противоречие.

Решение. Построим граф, вершины которого соответствуют выбранным точкам плоскости, а рёбра — проведённым отрезкам. Условие задачи означает, что на плоскости невозможны наложения отрезков. Для графа это означает, что каждая пара вершин может быть соединена единственным ребром.

Дальнейшее доказательство утверждения аналогично решению задачи 23. Воспользуемся методом доказательства от противного. Предположим, что степени всех n вершин графа различны и принимают значения из множества $\{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$.

Вершина степени 0 не должна быть соединена ребром ни с одной другой вершиной. Вершина степени $n - 1$ должна быть соединена рёбрами со всеми остальными вершинами, в том числе и с вершиной степени 0. Получили противоречие.

Значит, предположение было неверным, и в графе найдётся хотя бы одна пара вершин, имеющих равные степени, то есть на чертеже есть как минимум одна пара точек, из которых выходит одно и то же число отрезков.

Утверждение доказано.

2. Степень вершины, подсчёт числа рёбер

Задача 1

5-6 а) В государстве 50 городов, и из каждого выходит 8 дорог. Сколько всего дорог в государстве?

Идея. Искомое число равно числу рёбер в графе дорог государства.

Указания. 1) Построить граф дорог государства, в котором вершины соответствуют городам, рёбра — дорогам.
2) Определить число рёбер графа, используя лемму о рукопожатиях (число рёбер графа равно половине суммы степеней всех его вершин).

Решение. Представим граф дорог государства. Вершины графа соответствуют городам, рёбра — соединяющим их дорогам. По условию в графе 50 вершин, из каждой вершины выходит 8 рёбер, то есть степень каждой вершины равна 8.

Согласно лемме о рукопожатиях сумма степеней всех вершин любого графа равна удвоенному числу рёбер. Значит, в нашей задаче число рёбер графа равно $50 \cdot \frac{8}{2} = 200$. Это и есть общее число дорог в государстве.

Ответ. 200 дорог.

Задача 2

5-6 В турнире участвовали шесть шахматистов. Каждые два участника турнира сыграли между собой по одной партии.

Сколько всего было сыграно партий? Сколько партий сыграл каждый участник? Сколько очков набрали шахматисты все вместе?

Идея. Проанализировать граф турнира.

Указания. 1) Построить граф турнира, в котором вершины соответствуют участникам, рёбра — сыгранным партиям.
2) Определить степень каждой вершины.
3) Найти число рёбер графа, используя лемму о рукопожатиях (число рёбер графа равно половине суммы степеней всех его вершин).
4) При подсчёте очков учесть, что в каждой партии разыгрывается одно очко.

Решение. Построим граф турнира. Так как в турнире участвовали 6 шахматистов, граф содержит 6 вершин, соответствующих участникам.

Поскольку по условию каждые два участника турнира сыграли между собой по одной партии, каждая вершина графа соединена пятью рёбрами с остальными вершинами. Значит, степень каждой вершины графа равна 5, то есть каждый участник сыграл 5 партий.

Число встреч равно числу рёбер. По лемме о рукопожатиях число рёбер равно половине суммы степеней всех вершин графа:

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Поскольку было сыграно 15 партий, а в каждой партии разыгрывается одно очко, шахматисты набрали в сумме 15 очков.

Ответ. 15 партий; 5 партий; 15 очков.

Задача 3

$\boxed{5\text{-}6}$ а) Группа, в составе которой Пётр совершил туристическую поездку, состояла из пятнадцати человек. Вернувшись из путешествия, Пётр рассказал, что каждый участник группы был ранее знаком ровно с пятью другими участниками. Возможно ли это?

Идея. Сумма степеней вершин графа не может быть нечётным числом.

Указания. 1) Построить граф знакомств в туристической группе.

2) Найти сумму степеней всех вершин.
3) Воспользоваться тем, что по лемме о рукопожатиях найденная сумма должна быть чётным числом.

Решение. Представим граф знакомств в туристической группе. Вершины соответствуют участникам поездки; две вершины соединяются ребром, если соответствующие им участники были знакомы.

По утверждению Петра в группе из 15 человек каждый участник был ранее знаком ровно с 5 другими участниками. Значит, каждая из 15 вершин графа имеет степень 5. Согласно лемме о рукопожатиях в графе должно быть $\frac{15 \cdot 5}{2}$ рёбер. Поскольку число рёбер должно быть целым, утверждение Петра неверно.

Ответ. Нет.

Задача 4

$\boxed{5\text{-}6}$ Школьник сказал своему приятелю Вите Иванову:

— У нас в классе тридцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с одиннадцатью одноклассниками.

— Не может этого быть, — сразу ответил Витя Иванов, победитель математической олимпиады.

Почему он так решил?

Идея. Витя Иванов воспользовался леммой о рукопожатиях.

Указания. 1) Построить граф друзей в классе.
2) Определить число рёбер в графе.
3) Получить несоответствие с леммой о рукопожатиях.

Решение. Представим граф друзей в классе. Вершины соответствуют ученикам; две вершины соединяются ребром, если соответствующие им ученики дружат.

По утверждению школьника каждый из 35 учеников класса дружит ровно с 11 одноклассниками. Значит, в графе друзей-одноклассников каждая из 35 вершин графа имеет степень 11. Согласно лемме о рукопожатиях число рёбер в графе равно половине суммы степеней всех его вершин. Поскольку все вершины имеют нечётную степень, число вершин графа должно быть чётным. Витя Иванов заметил несоответствие между рассказом приятеля и леммой о рукопожатиях и заключил, что школьник заблуждается.

Ответ. Число вершин нечётной степени должно быть чётным.

Задача 5

5-6 Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлёт письма трём из остальных. Может ли оказаться, что каждый получит письма от тех, кому напишет сам?

Идея. Число вершин графа нечётной степени не может быть нечётным.

Указания. 1) Использовать граф переписки школьников.
2) Предположить, что каждый ученик получит три письма от тех друзей, которым написал сам.
3) Воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях и получить противоречие.

Решение. Представим граф переписки друзей. Вершины графа соответствуют школьникам; рёбра указывают на отправленные письма. Граф содержит 11 вершин. Из каждой вершины выходит 3 ребра.

Предположим, что граф не является ориентированным, то есть каждый школьник получит три письма от тех друзей, кому напишет сам. Значит, в неориентированном графе будет нечётное число вершин нечётной степени. По следствию из леммы о рукопожатиях это невозможно, число нечётных вершин должно быть чётным.

Ответ. Нет.

Задача 6

5-6 Можно ли на плоскости так нарисовать 9 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

Идея. Число вершин графа нечётной степени не может быть нечётным.

Указания. 1) Построить граф, соответствующий условию задачи. В качестве вершин взять отрезки; рёбрами соединить пересекающиеся отрезки.
2) Воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях и получить противоречие.

Решение. Представим граф, в котором вершины изображают отрезки, а рёбра соединяют вершины только в том случае, если соответствующие вершинам отрезки пересекаются. По условию граф содержит 9 вершин, из каждой вершины выходит 3 ребра.

Заметим, что в построенном графе нечётное число вершин нечётной степени. По следствию из леммы о рукопожатиях эта ситуация невозможна, число нечётных вершин должно быть чётным.

Ответ. Нет.

Задача 7

7 Существует ли многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон?

Идея. Число вершин графа нечётной степени не может быть нечётным.

Указания. 1) Построить граф, соответствующий условию задачи. В качестве вершин взять грани; две вершины соединить ребром, если грани имеют общую сторону.
2) Воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях и получить противоречие.

Решение. Предположим, что многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон, существует.

Построим граф, вершины которого соответствуют граням многогранника. По условию число вершин графа нечётно. Две вершины соединим ребром, если соответствующие грани имеют общую сторону. По условию степень каждой вершины графа нечётна.

Построенный граф содержит нечётное число вершин нечётной степени. По следствию из леммы о рукопожатиях число нечётных вершин в графе должно быть чётным. Полученное противоречие означает, что предположение было неверным и многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон, не существует.

Ответ. Нет.

Задача 8

5-6 Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 100 дорог между городами?

Идея. Воспользоваться леммой о рукопожатиях.

Указания. 1) Построить граф дорог.

2) Взяв число вершин графа в качестве переменной, составить уравнение для суммы степеней вершин.

3) Доказать, что уравнение не имеет решений на множестве натуральных чисел.

Решение. Рассмотрим граф дорог государства. Вершины графа изображают города, рёбра — соединяющие их дороги. Обозначим число вершин графа через n, $n \in \mathbb{N}$. По условию степень каждой вершины графа равна трём.

Воспользуемся леммой о рукопожатиях: сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер. Получаем уравнение $3n = 2 \cdot 100$. Поскольку число 3 не является делителем числа 200, данное уравнение не имеет решений на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Значит, в государстве не может быть 100 дорог, если из каждого города выходит ровно три дороги.

Ответ. Нет.

Задача 9

$\boxed{5\text{-}6}$ а) В турнире принимают участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

Идея. Число вершин графа нечётной степени не может быть нечётным.

Указания. 1) Построить граф турнира на момент, описанный в условии задачи.

2) Воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях и получить противоречие.

Решение. Представим граф турнира на момент, когда каждый из участников сыграл ровно 7 партий. Вершины графа соответствуют шахматистам, число вершин равно 15, степень каждой вершины равна 7; рёбра соединяют вершины в том случае, если игра соответствующих участников состоялась.

В построенном графе нечётное число вершин нечётной степени. По следствию из леммы о рукопожатиях число нечётных вершин должно быть чётным. Значит, описанная в условии ситуация невозможна.

Ответ. Нет.

Задача 10

$\boxed{5\text{-}6}$ В школе 953 ученика. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Доказать, что хотя бы у одного из них число знакомых среди учеников этой школы чётно.

Идея. Воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях.

Указания. 1) Построить граф знакомств учеников в школе.
2) Показать, что степени всех вершин графа не могут быть нечётными числами.

Решение. Представим граф учеников школы. Вершины графа изображают учащихся; две вершины соединены ребром, если соответствующие ученики знакомы. По условию граф содержит 953 вершины.

Предположим, что степени всех вершин нечётные. Тогда в графе знакомств нечётное число нечётных вершин. По следствию из леммы о рукопожатиях такой граф не существует. Значит, не все степени вершин нечётные, есть по крайней мере одна вершина с чётной степенью.

Утверждение доказано.

Задача 11

$\boxed{5\text{-}6}$ а) В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по три друга в этом классе, 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

Идея. Сумма всех степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер.

Указания. 1) Использовать граф друзей в классе.
2) Найти сумму степеней всех вершин графа и воспользоваться леммой о рукопожатиях.

Решение. Представим граф друзей в классе. Вершины графа изображают учеников; две вершины соединены ребром, если соответствующие вершинам ученики знакомы.

По условию граф содержит 30 вершин. Найдём сумму их степеней:

$$9 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 121.$$

Согласно лемме о рукопожатиях сумма всех степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер. Поскольку число 121 является нечётным, граф, соответствующий условию задачи, не существует.

Ответ. Нет.

Замечание. Можно было не считать сумму степеней вершин графа, а воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях, согласно которому в любом графе число вершин нечётной степени чётно. В нашей задаче число вершин нечётной степени нечётно: в пункте а) таких вершин 19, в пункте б) — 7.

Задача 12

5-6 а) У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

Идея. Число вершин графа нечётной степени должно быть чётным.

Указания. 1) Построить граф вассальных баронств.
2) Воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях и получить противоречие.

Решение. Построим граф владений баронов (баронств). Вершины графа соответствуют владениям, число вершин равно 19; рёбра соединяют вершины в том случае, если соответствующие владения являются соседними, то есть имеют общую границу. Степени вершин по условию равны 1, 5 или 9.

Заметим, что в графе оказалось нечётное число вершин нечётной степени. По следствию из леммы о рукопожатиях такой граф не существует; число нечётных вершин должно быть чётным.

Ответ. Нет.

Задача 13

5-6 В Диснейленде на озере семь островов, из каждого из них выходит один, три или пять мостов. Доказать, что хотя бы один из мостов ведёт на берег.

Идея. Число вершин графа нечётной степени должно быть чётным.

Указания. 1) Предположить, что мосты в Диснейленде соединяют только острова.
2) Построить граф мостов.
3) Воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях и получить противоречие.

Решение. Предположим, что все мосты Диснейленда соединяют острова и ни один из мостов не ведёт на берег. Построим граф мостов при этом предположении. Вершины графа соответствуют островам, рёбра — мостам.

Заметим, что построенный граф мостов содержит семь вершин нечётной степени 1, 3 или 5. По следствию из леммы о рукопожатиях число нечётных вершин должно быть чётным. Полученное противоречие означает, что предположение было неверным и хотя бы один из мостов ведёт не на остров, а на берег.

Утверждение доказано.

Задача 14

5-6 а) Доказать, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Идея. Число вершин графа нечётной степени должно быть чётным.

Указания. 1) Представить граф рукопожатий жителей Земли, соответствующий условию.
2) Воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях.

Решение. Построим граф рукопожатий жителей Земли. Вершины графа соответствуют людям, сделавшим в течение жизни нечётное число рукопожатий; рёбра соединяют вершины, если соответствующие вершинам жители обменялись рукопожатием.

В построенном графе все вершины имеют нечётные степени. По следствию из леммы о рукопожатиях число вершин нечётной степени должно быть чётным. Это означает, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Утверждение доказано.

Задача 15

5-7 В танце «Большая дружба» может участвовать не менее семи марсиан, у каждого из которых не менее пяти рук.

Какое наименьшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина.

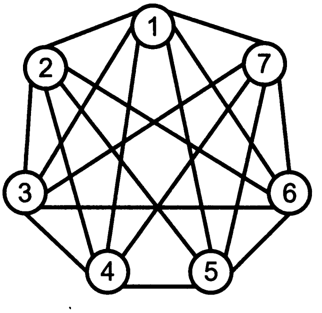
Идея. Воспользоваться леммой о рукопожатиях.

Указания. 1) Построить граф танца «Большая дружба».
2) Используя лемму о рукопожатиях и требования условия, определить число вершин графа и их степени.
3) Найти суммарное число степеней вершин построенного графа.

Решение. Построим граф танца «Большая дружба». Вершины графа обозначают марсиан; степень вершины равна числу рук марсианина. Две вершины соединены ребром, если соответствующие этим вершинам марсиане держатся за руки.

По лемме о рукопожатиях граф не может содержать семь вершин нечётной степени. Поскольку требуется найти граф с наименьшим числом рёбер, будем считать, что один из семи марсиан имеет шесть рук. В этом случае сумма степеней вершин графа равна $6 \cdot 5 + 6 = 36$. Это и есть наименьшее число рук у танцующих.

Осталось показать, что такой граф существует. На рисунке изображён граф, имеющий семь вершин указанных степеней.



Ответ. 36 рук.

Замечание. Построенный граф является полным.

Полный граф — простой неориентированный граф, в котором каждая пара вершин смежна.

Задача 16

6-7 На столе лежат журналы. Каждый посетитель просмотрел два журнала, каждый журнал просмотрели три человека. Для каждой пары журналов есть только один посетитель, который их просмотрел. Сколько журналов и посетителей?

Идея. Граф просмотра журналов является полным.

Указания. 1) Построить граф просмотра журналов; в качестве вершин рассмотреть журналы, в качестве рёбер — посетителей.
2) Доказать, что граф полный.

Решение. Построим граф просмотра журналов посетителями. Вершинам графа поставим в соответствие журналы. По условию каждый посетитель посмотрел ровно два журнала. Значит, каждому посетителю в графе можно поставить в соответствие одно ребро. Необходимо найти число вершин и рёбер графа.

Построенный граф является полным, так как по условию каждая пара вершин связана ребром. При этом все вершины графа имеют степень 3. Значит, в графе 4 вершины и 6 рёбер.

Ответ. 4 журнала и 6 посетителей.

Задача 17

5-6 В городе N от каждой площади отходит ровно 5 улиц, соединяющих площади. Доказать, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.

Идея. Число вершин графа с нечётными степенями должно быть чётным.

Указания. 1) Использовать граф улиц.
2) Для доказательства чётности числа площадей воспользоваться следствием из леммы о рукопожатиях.
3) Для доказательства делимости числа дорог на 5 воспользоваться леммой о рукопожатиях.

Решение. Построим граф дорог города N. Вершины графа соответствуют площадям города; две вершины соединены ребром, если соответствующие вершинам площади соединены улицей.

Из каждой вершины графа по условию выходит пять рёбер. По следствию из леммы о рукопожатиях число вершин нечётной степени должно быть чётным. Это означает, что число площадей чётно. Обозначим это число через $2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Число улиц равно числу рёбер графа. По лемме о рукопожатиях число рёбер k ($k \in \mathbb{N}$) равно полусумме степеней всех его вершин:

$$k = \frac{2n \cdot 5}{2} = 5n.$$

Полученное равенство означает, что число улиц кратно пяти.

Утверждение доказано.

Задача 18

6-7 а) На кошачьей выставке каждый посетитель погладил ровно трёх кошек. При этом оказалось, что каждую кошку погладили ровно три посетителя. Доказать, что посетителей было ровно столько же, сколько кошек.

Идея. Использовать граф кошачьей выставки.

Указания. 1) Построить граф. Разбить множество вершин на две группы (посетители и кошки). Соединить вершины в случае тактильного контакта (посетитель погладил кошку).
2) Ввести переменные, равные числу вершин в каждой группе.
3) Показать, что из равенства сумм степеней вершин первой и второй групп следует равенство числа составляющих их вершин.

Решение. Построим граф общения посетителей кошачьей выставки и её экспонатов. Вершины графа разобьём на две группы. Вершины первой группы соответствуют посетителям (n вершин), вершины второй группы соответствуют кошкам (m вершин). Каждое ребро соединяет вершину первой группы с одной из вершин второй группы, если соответствующий первой вершине посетитель погладил соответствующую второй вершине кошку.

Из условия задачи следует, что степень каждой вершины первой группы равна 3. Значит, из вершин первой группы выходит $3n$ рёбер.

Степень каждой вершины второй группы по условию также равна 3. Значит, из вершин второй группы выходит $3m$ рёбер.

Поскольку рёбра графа соединяют пары вершин из разных групп, получаем уравнение $3n = 3m$, из которого следует, что $n = m$, то есть кошачью выставку посетило ровно столько человек, сколько кошек в ней участвовало.

Утверждение доказано.

Замечание. Построенный в этой задаче граф является *двудольным*. Граф называется *n-дольным*, если множество его вершин можно разбить на n частей (долей) так, что каждое ребро будет иметь свои концы в разных долях. *N-дольные* графы будут подробно рассмотрены в следующих разделах.

Задача 19

$\boxed{6\text{-}7}$ На кошачьей выставке в ряд сидят 10 котов и 19 кошек, причём рядом с каждой кошкой сидит более толстый кот. Доказать, что рядом с любым котом сидит кошка, которая тоньше его.

Идея. Использовать граф кошачьей выставки.

Указания. 1) Построить граф. Разбить множество вершин на две группы (коты и кошки). Соединить вершины, следуя условию.
2) Показать, что вершины второй группы имеют степень не ниже первой.

Решение. Построим *двудольный* граф размещения котов и кошек на выставке. Вершины графа разобьём на две группы. В первую группу входят вершины, соответствующие кошкам (19 вершин), вершины второй группы соответствуют котам (10 вершин). Соединим две вершины из разных групп ребром, если соответствующие им кошка и кот сидят рядом и кот толще кошки.

Из условия задачи следует, что степень каждой вершины первой группы равна либо 1, либо 2. Значит, граф содержит не менее 19 рёбер.

По условию вершины второй группы могут иметь степень не более 2. Если какая-либо вершина второй группы является изолированной, то в этой группе должна существовать вершина степени больше 2, что противоречит условию. Значит, во второй группе может быть только 9 вершин степени 2 и одна вершина степени 1.

Утверждение доказано.

Задача 20

$\boxed{6\text{-}7}$ На туристическом слёте выяснилось, что каждый юноша знаком с 8 девушками, а каждая девушка знакома с 6 юношами. Кого больше на слёте: юношей или девушек?

Идея. Использовать граф знакомств юношей и девушек.

Указания. 1) Представить граф знакомств юношей и девушек, участвующих в туристическом слёте.
2) В качестве переменных рассмотреть число девушек и число юношей и составить уравнение для числа рёбер графа.

3) Используя уравнение, сравнить значения введённых переменных.

Решение. Построим *двудольный* граф знакомств юношей и девушек, принимающих участие в туристическом слёте. Разобьём множество вершин на две группы (доли). Вершины первой группы соответствуют девушкам, обозначим их число через k ($k \in \mathbb{N}$). Вершины второй группы соответствуют юношам, обозначим их число через m ($m \in \mathbb{N}$). Соединим ребром вершину первой группы с вершиной второй группы, если соответствующие этим вершинам девушка и юноша знакомы.

По условию степень каждой вершины первой группы равна 6, степень каждой вершины второй группы равна 8. Запишем уравнение для числа рёбер графа:

$$6k = 8m \Longrightarrow k = \frac{8}{6}m.$$

Из неравенства $\frac{4}{3} > 1$ следует, что $k > m$, то есть девушек в туристической группе больше, чем юношей.

Ответ. Девушек больше.

Задача 21

6-7 В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают Карабасы и Барабасы. Каждый Карабас знаком с шестью Карабасами и девятью Барабасами. Каждый Барабас знаком с десятью Карабасами и семью Барабасами. Кого в этой стране больше — Карабасов или Барабасов?

Идея. Использовать граф знакомств Карабасов и Барабасов.

Указания. 1) Построить двудольный граф знакомств Карабасов и Барабасов.
2) Составить уравнение для числа рёбер графа.

Решение. Построим *двудольный* граф знакомств Карабасов и Барабасов. Разобьём множество вершин на две группы (доли). Вершины первой группы соответствуют Карабасам, обозначим их число через m ($m \in \mathbb{N}$). Вершины второй группы соответствуют Барабасам, обозначим их число через n ($n \in \mathbb{N}$). Соединим ребром вершину первой группы с вершиной второй группы, если соответствующие этим вершинам субъекты знакомы.

По условию степень каждой вершины первой группы равна 9, степень каждой вершины второй группы равна 10. Составим уравнение для числа рёбер графа:

$$9m = 10n \Longrightarrow m = \frac{10}{9}n.$$

Из последнего соотношения следует, что $m > n$, то есть Карабасов больше, чем Барабасов.

Ответ. Карабасов больше, чем Барабасов.

Замечание. В решении не была использована информация о знакомствах внутри каждой группы. Эта информация была дана для того, чтобы усложнить условие и попытаться запутать читателя.

Задача 22

6-7 В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и девочек?

Идея. Использовать граф дружбы мальчиков и девочек.

Указания. 1) Построить граф дружбы мальчиков и девочек в классе.
2) В качестве переменных рассмотреть число мальчиков и число девочек.
3) Составить систему уравнений для числа рёбер графа и общего числа учеников в классе.

Решение. Построим *двудольный* граф дружбы мальчиков и девочек в классе. Разобьём множество вершин на две группы (доли). Вершины первой группы соответствуют мальчикам, обозначим их число через m ($m \in \mathbb{N}$). Вершины второй группы соответствуют девочкам, обозначим их число через n ($n \in \mathbb{N}$). Соединим ребром вершину первой группы с вершиной второй группы, если соответствующие этим вершинам мальчик и девочка дружат.

По условию степень каждой вершины первой группы равна 4, степень каждой вершины второй группы равна 5. Составим систему уравнений для числа рёбер графа и числа учеников в классе:

$$\begin{cases} 4m = 5n, \\ m + n = 27. \end{cases}$$

Решим систему методом подстановки:

$$\begin{cases} m = \frac{5}{4}n, \\ \frac{5}{4}n + n = 27; \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{5}{4}n, \\ \frac{9}{4}n = 27; \end{cases} \iff n = 12, \ m = 15.$$

Ответ. 15 мальчиков и 12 девочек.

Задача 23

$\boxed{6\text{-}7}$ За столом сидят несколько мальчиков и пять девочек, а на столе на тарелке лежат 30 булочек. Каждая девочка дала по булочке (с тарелки) каждому знакомому ей мальчику, а затем каждый мальчик дал по булочке (с тарелки) каждой незнакомой ему девочке. После этого оказалось, что все булочки розданы. Сколько было мальчиков?

Идея. Использовать граф обмена булочками.

Указания. 1) Построить граф передачи булочек мальчиками и девочками.
2) В качестве переменной рассмотреть число мальчиков.
3) Составить уравнение для числа рёбер графа.

Решение. Построим *двудольный* граф передачи булочек мальчиками и девочками. Разобьём множество вершин на две группы (доли). Вершины первой группы соответствуют мальчикам, обозначим их число через m ($m \in \mathbb{N}$). Вершины второй группы соответствуют девочкам, по условию таких вершин пять. Соединим ребром вершину первой группы с вершиной второй группы, если в соответствующей паре «мальчик-девочка» состоялась передача булочки.

По условию каждая девочка передала булочки знакомым мальчикам и получила булочки от незнакомых мальчиков. Значит, степень каждой вершины второй группы равна числу мальчиков, то есть числу вершин первой группы. Составим уравнение для числа рёбер графа:

$$5m = 30 \iff m = 6.$$

Значит, мальчиков было шесть.

Ответ. 6 мальчиков.

Задача 24

$\boxed{6\text{-}7}$ 1997 городов соединены дорогами так, что из любого города можно доехать до любого другого (возможно, с пересадками). Доказать, что построено по крайней мере 1996 дорог.

Идея. Граф дорог с $n+1$ вершиной, соответствующий условию, должен содержать не менее n рёбер.

Указания. 1) Построить граф дорог с 1997 вершинами и 1996 рёбрами, соответствующий условию.
2) Методом математической индукции доказать, что меньшего числа рёбер в таком графе быть не может.

Решение. Представим граф дорог, соединяющих 1997 городов. Вершины графа соответствуют городам, рёбра — дорогам.

Заметим, что граф, содержащий 1997 вершин и 1996 рёбер и удовлетворяющий условию задачи, построить легко. Достаточно перенумеровать вершины и соединить рёбрами каждую пару вершин с номерами k и $k+1$, где $k \in \{1; 2; 3; \ldots; 1996\}$. В этом графе первая и 1997-я вершины будут висячими, а вершины с номерами от 2 до 1996 включительно будут иметь степень, равную 2. В таком графе из любой вершины можно попасть в любую другую вершину.

Покажем далее, что не существует графа с меньшим числом рёбер, соответствующего условию задачи. Для этого докажем более общее утверждение: «*Любой граф, содержащий $n+1$ вершину, в котором из любой вершины можно попасть в любую другую вершину, имеет не менее n рёбер*». Воспользуемся методом математической индукции.

Шаг 1. База индукции. Рассмотрим граф, содержащий три вершины и два ребра. Такой граф соответствует условию. Заметим, что если в графе с тремя вершинами число рёбер меньше двух, то по крайней мере одна вершина будет изолированной, что противоречит условию.

Шаг 2. Индукционный переход. Рассмотрим граф, содержащий n вершин и $n-1$ ребро, удовлетворяющий условию задачи. На его основе можно построить граф, содержащий $n+1$ вершину и n рёбер, также удовлетворяющий условию задачи. Для этого дополнительную $(n+1)$-ю вершину нужно соединить ребром с одной из остальных n вершин.

Утверждение доказано.

Итак, в графе, содержащем 1997 вершин, в котором из любой вершины можно попасть в любую другую вершину, должно быть не менее 1996 рёбер.

Замечание. Графы, в которых от любой вершины можно перейти по рёбрам к любой другой вершине, называются ***связными***. Связные графы будут детально рассмотрены в следующих разделах.

Задача 25

6-7 В шахматном турнире в один круг участвуют 17 человек. Верно ли, что в любой момент турнира найдётся шахматист, сыгравший к этому моменту чётное число партий (может быть, ни одной)?

Идея. Число вершин графа нечётной степени должно быть чётным.

Указания. 1) Представить граф встреч на шахматном турнире.
2) Воспользоваться леммой о рукопожатиях.

Решение. Рассмотрим граф встреч на шахматном турнире в динамике. Вершины соответствуют участникам турнира. По условию граф содержит 17 вершин, и эта характеристика не зависит от времени. Две вершины в некоторый момент турнира будут соединены ребром, если соответствующие этим вершинам игроки к указанному моменту сыграли партию. В отличие от числа вершин число рёбер графа является функцией времени.

В каждый момент времени число рёбер равно числу сыгранных к этому моменту партий. Поскольку в графе нечётное число вершин, по лемме о рукопожатиях все вершины не могут иметь нечётные степени. Значит, в любой момент турнира найдётся по крайней мере одна чётная вершина.

Ответ. Верно.

Задача 26

5-6 В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире и сколько партий сыграл заболевший участник?

Идея. Шахматный турнир должен был проходить по круговой системе.

Указания. 1) Использовать граф турнира, в котором вершины соответствуют участникам, рёбра — встречам.
2) Составить уравнение для числа рёбер графа.

Решение. Представим граф турнира. Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Значит, в графе n вершин. Если бы все встречи состоялись, число встреч (число рёбер графа) было бы равно половине суммы степеней всех вершин. По условию несколько встреч (обозначим их число через k) было пропущено из-за болезни одного шахматиста. Составим уравнение для числа рёбер:

$$\frac{n(n-1)}{2} - k = 24 \iff n(n-1) = 2k + 48,$$

где $n, k \in \mathbb{N}$. Поскольку $k < n$, получаем неравенство

$$n(n-1) < 2n + 48 \iff n^2 - 3n - 48 < 0.$$

Используя свойства квадратичной функции, легко установить, что данное неравенство справедливо для натуральных значений n из множества $\{1; 2; 3; \ldots; 8\}$.

1) При $1 \leqslant n \leqslant 7$ получаем $2k = n(n-1) - 48 \leqslant 42 - 48 < 0$. Значит, натуральные значения переменной n от 1 до 7 включительно не подходят.

2) При $n = 8$ получаем $8 \cdot 7 = 2k + 48 \iff k = 4$ — подходит.

Итак, в турнире участвовало $n = 8$ шахматистов, а заболевший участник сыграл $n - 1 - k = 8 - 1 - 4 = 3$ партии.

Ответ. 8 человек; 3 партии.

Задача 27

$\boxed{6\text{-}7}$ а) В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира до того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

Идея. Шахматный турнир должен был проходить по круговой системе.

Указания. 1) Использовать граф турнира, в котором вершины соответствуют участникам, рёбра — встречам.
2) Составить уравнение для числа рёбер графа.

3) Учесть информацию о моменте заболевания двух игроков.

Решение. Рассмотрим граф шахматного турнира. Предположим, что он содержит n вершин, соответствующих участникам турнира. Если бы все шахматисты сыграли все партии, то в графе было бы $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер, соответствующих проведённым партиям. Однако несколько партий было отменено из-за болезни двух игроков. Обозначим число таких партий через k. Составим уравнение для числа рёбер скорректированного графа, в котором учтено выбытие игроков (другими словами, для числа фактически проведённых встреч):

$$\frac{n(n-1)}{2} - k = 94 \iff n(n-1) = 2k + 188,$$

где $n, k \in \mathbb{N}$. Поскольку $k \leqslant 2(n-1) - 1 = 2n - 3$, получаем неравенство

$$n(n-1) \leqslant 2(2n-3) + 188 \iff n^2 - 5n - 182 \leqslant 0.$$

Данное неравенство справедливо для натуральных значений n из множества $\{1; 2; 3; \ldots; 16\}$.

1) При $1 \leqslant n \leqslant 14$ получаем $2k = n(n-1) - 188 \leqslant 182 - 188 < 0$. Значит, натуральные значения переменной n от 1 до 14 включительно не подходят.

2) При $n = 15$ получаем $15 \cdot 14 = 2k + 188 \iff k = 11$.

3) При $n = 16$ получаем $16 \cdot 15 = 2k + 188 \iff k = 26$.

Найдены два возможных решения задачи. Осталось проверить, действительно ли заболевшие игроки покинули турнир в первой его половине.

I. Рассмотрим $n = 15$, $k = 11$. После ухода двух участников в турнире осталось 13 игроков. Они провели $\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ встреч друг с другом. В остальных встречах принимали участие заболевшие позже игроки, таких встреч $94 - 78 = 16$. Поскольку каждый из заболевших шахматистов должен был сыграть 14 партий, по крайней мере один из выбывших участников провёл больше половины возможных партий, что противоречит условию.

II. Рассмотрим $n = 16$, $k = 26$. После ухода двух участников в турнире осталось 14 игроков. Они провели $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ встречу друг с другом, а выбывшие позже шахматисты приняли участие в $94 - 91 = 3$ встречах, что удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 16 шахматистов.

Задача 28

$\boxed{6\text{-}7}$ У царя Гвидона было 5 сыновей. Из всех его потомков (детей, внуков, правнуков и так далее) 57 имели ровно трёх сыновей, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона? (Учитываются только потомки мужского пола.)

Идея. Число потомков царя Гвидона равно числу рёбер на его генеалогическом древе.

Указания. 1) Составить граф родства потомков царя Гвидона по мужской линии.
2) Найти число рёбер графа.

Решение. Представим родословную царя Гвидона в виде графа, в котором согласно правилам русской генеалогии учитывается родство только по мужской линии. Вершины графа соответствуют царю и его потомкам мужского пола. Две вершины соединены ребром, если соответствующие вершинам персонажи связаны отношением «отец — сын». Одна вершина графа, соответствующая самому царю, имеет степень, равную пяти. 57 вершин графа имеют степень, равную четырём (потомки с тремя сыновьями). Остальные вершины графа имеют степень, равную единице (бездетные потомки).

Каждое ребро графа отражает факт рождения ребёнка мужского пола. История сохранила информацию о $5 + 57 \cdot 3 = 176$ таких фактах. Значит, у Гвидона было 176 потомков.

Ответ. 176 потомков.

Задача 29

$\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

Идея. Воспользоваться методом доказательства от противного.

Указания. 1) Предположить, что существует граф, у которого четыре вершины из пяти имеют степень 4.
2) При сделанном предположении найти степень пятой вершины и получить противоречие.

Решение. Воспользуемся методом доказательства от противного. Предположим, что существует граф с пятью вершинами такой, что степень четырёх его вершин равна 4. Значит, каждая из этих четырёх вершин соединена четырьмя рёбрами с остальными вершинами графа, поэтому степень пятой вершины также равна 4.

Этот вывод противоречит условию задачи. Следовательно, предположение было неверным и графа с описанными в условии свойствами не существует.

Утверждение доказано.

Задача 30

[6-7] Доказать, что в городе найдутся два человека, у которых одинаковое количество знакомых горожан.

Идея. Использовать граф знакомств жителей города и метод доказательства от противного.

Указания. 1) Представить граф знакомств жителей города.
2) Рассмотреть возможные значения степеней вершин.
3) Предположить, что утверждение неверно, и получить противоречие.

Решение. Представим граф знакомств жителей города. Пусть он содержит n вершин, соответствующих жителям города. Каждая вершина может иметь степень от 0 до $n-1$.

Предположим, что утверждение неверно и все вершины графа имеют разные степени. Значит, существует одна вершина степени 0 и одна вершина степени $n-1$, то есть один житель города не имеет знакомых горожан, тогда как другой житель знаком со всеми горожанами.

Полученное противоречие означает, что предположение было неверным и в графе найдутся две вершины одинаковой степени, то есть в городе найдутся два человека, у которых одинаковое количество знакомых горожан.

Утверждение доказано.

Задача 31

[7] На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

Идея. Использовать граф друзей участников конгресса.

Указания. 1) В графе друзей участников конгресса выбрать вершину наибольшей степени.
2) Показать, что одна из вершин, смежных с выбранной, имеет степень, равную единице.

Решение. Рассмотрим граф друзей участников конгресса. Выберем в графе вершину наибольшей степени. Обозначим выбранную вершину через v, а её степень через N.

Каждая из N вершин, смежных с выбранной вершиной v, имеет степень не меньше единицы (так как у соответствующего учёного есть хотя бы один друг v) и не больше N (так как N — наибольшая степень вершин графа). Кроме того, по условию никакие две вершины, смежные с v, не имеют равных степеней.

Поскольку число смежных вершин совпадает с числом возможных значений их степеней, степень одной из смежных вершин будет равна 1. Это означает, что учёный, соответствующий вершине степени 1, дружит только с выбранным учёным v.

Утверждение доказано.

Задача 32

6-7 В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?

Идея. Воспользоваться методом доказательства от противного.

Указания. 1) Предположить, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу.
2) Построить граф посещения склада мышами.
3) Показать, что для построенного графа не все условия задачи выполняются.

Решение. Предположим, что описанная в условии ситуация возможна. Построим для неё граф посещения склада семьёй мышей. Граф содержит 24 вершины, соответствующие членам семьи. Рёбра соединяют две вершины, если соответствующая им пара мышей посетила склад в одну из ночей.

По предположению граф описывает ситуацию, при которой каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу, поэтому из каждой вершины выходит по 23 ребра.

Одному посещению склада соответствуют три ребра, выходящие из одной вершины. Заметим, что степень каждой вершины равна 23, а число 23 не кратно трём. Получено противоречие. Значит, каждая мышка не сможет побывать на складе с каждой ровно по одному разу.

Ответ. Нет.

Задача 33

6-7 Можно ли нарисовать 1006 различных 2012-угольников, у которых все вершины общие, но при этом ни у каких двух нет ни одной общей стороны?

Идея. Рассмотреть граф, подграфами которого являются 2012-угольники.

Указания. 1) Представить граф с 2012 вершинами, соответствующий условию задачи.
2) Воспользоваться тем, что все вершины многоугольников имеют степень, равную 2. Определить, сколько пар рёбер может выходить из одной вершины графа.

Решение. Представим граф, содержащий 2012 вершин, подграфами которого являются всевозможные 2012-угольники, не имеющие общих сторон.

Рассмотрим одну из вершин графа. Её можно соединить с остальными вершинами не более чем 2011 рёбрами. Поскольку по условию 2012-угольники не имеют общих сторон, а из любой вершины многоугольника выходят ровно две стороны, из рассматриваемой вершины могут выходить не более 1005 пар рёбер, принадлежащих разным 2012-угольникам. Значит, таких многоугольников не более 1005.

Ответ. Нельзя.

Задача 34

6-7 В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника турнира сыграли по 11 партий, один — 10 партий, три — по 8 партий и два — по 7 партий. Может ли он оказаться прав?

Идея. Предположить, что барон Мюнхгаузен оказался прав, и получить противоречие условию.

Указания. 1) Построить граф переигровок шахматного турнира.
2) Используя лемму о рукопожатиях, найти число рёбер графа.
3) Показать, что в построенном графе нет вершины степени 3.

Решение. Предположим, что барон Мюнхгаузен оказался прав. Построим граф переигровок шахматного турнира. Он содержит 8 вершин, соответствующих участникам турнира. Две вершины соединены ребром, если партия между соответствующими участниками переигрывалась после первой ничьей.

Согласно версии барона Мюнхгаузена, две вершины рассматриваемого графа имеют степень $11-7=4$, одна вершина степени $10-7=3$, три вершины степени $8-7=1$ и две вершины степени 0. Сумма степеней вершин равна

$$2\cdot 4+1\cdot 3+3\cdot 1+2\cdot 0=14.$$

По лемме о рукопожатиях граф имеет $\frac{14}{2}=7$ рёбер.

Заметим, что из двух вершин степени 4 в построенном графе выходит ровно 7 рёбер. Значит, в графе не может существовать вершины степени 3, так как вершины степени ниже 4 могут быть соединены рёбрами не более чем с двумя вершинами степени 4.

Барон Мюнхгаузен не прав.

Ответ. Нет.

Задача 35

$\boxed{6\text{-}7}$ Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 25 игр, а другой — 17 игр. Мог ли третий участник сыграть а) 34; б) 35; в) 56 игр?

Идея. Учесть правила игры в шашки и воспользоваться графическим представлением шашечного турнира.

Указания. а) Привести пример шашечного турнира, в котором третий участник сыграл 34 партии.
б) Применить следствие из леммы о рукопожатиях.
в) Воспользоваться тем, что в каждой игре заняты ровно два участника.

Решение. а) Обозначим число игр первого участника со вторым через a, первого с третьим через b, второго с третьим через c. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=25, \\ a+c=17, \\ b+c=34; \end{cases} \iff a=4,\ b=21,\ c=13.$$

Поскольку система имеет решение, третий участник мог сыграть 34 игры.

б) Выясним, мог ли третий участник сыграть 35 игр. Представим граф шашечного турнира. Граф содержит три вершины; степень первой вершины равна 25, степень второй вершины 17, степень третьей вершины 35. Согласно следствию из леммы о рукопожатиях такой граф не может существовать, поскольку он содержит нечётное число вершин нечётной степени. Значит, третий участник не мог сыграть 35 партий.

в) Третий игрок не может сыграть 56 партий, поскольку это число больше суммарного количества партий первого и второго игроков, а из условия следует, что в каждой игре было ровно два участника.

Ответ. а) Да; б) нет; в) нет.

Замечание. В пункте б) был рассмотрен граф, в котором две вершины соединены несколькими рёбрами. Такие рёбра называют *кратными*, граф с кратными рёбрами называют *мультиграфом*.

Задача 36

$\boxed{7}$ Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

Идея. Воспользоваться графом переписки друзей.

Указания. 1) Представить ориентированный мультиграф переписки друзей.

2) Ввести две целочисленные переменные, равные числу друзей и количеству писем, написанных каждым другом.

3) Составить уравнение для числа направленных рёбер графа; решить его на множестве натуральных чисел перебором.

Решение. Проанализируем *ориентированный мультиграф* переписки друзей. Предположим, что в графе n вершин, соответствующих участникам. Если один участник написал k писем, то соответствующая вершина будет соединена k направленными рёбрами с остальными $n-1$ вершинами.

По условию все друзья написали одно и то же количество писем. Значит, в каждую вершину приходит $k(n-1)$ рёбер, а общее число направленных рёбер графа, равное числу полученных писем, есть

$$k(n-1)n = 440.$$

Это уравнение необходимо решить на множестве натуральных чисел. Разложим число 440 на простые множители:

$$k(n-1)n = 2^3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Поскольку натуральные числа $n-1$ и n являются подряд идущими, задача имеет только три решения, которые находятся перебором возможных значений чисел $n-1$ и n.

1) $n-1=1$, $n=2$, $k=2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220$.
2) $n-1=4$, $n=5$, $k=2 \cdot 11 = 22$.
3) $n-1=10$, $n=11$, $k=2^2=4$.

Ответ. 2, 5 или 11 человек.

Задача 37

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Во дворе стоят 10 столбов. Электрику Петрову дали задание соединить столбы проводами таким образом, чтобы каждый провод соединял ровно два столба, никакие два столба не были соединены дважды и, главное, чтобы для любых четырёх столбов нашлось ровно три провода, протянутых между этими столбами. Доказать, что электрик Петров не сумеет справиться с этим заданием.

б) А что, если столбов не 10, а 12?

Идея. Воспользоваться методом доказательства от противного.

Указания. а) 1) Предположив, что электрик справился с заданием, построить связный граф, соединив верёвками столбы, не связанные проводами.

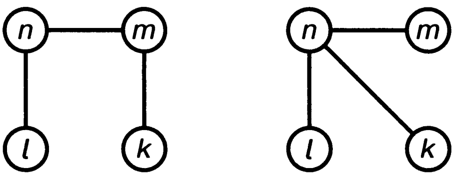
2) Показать, что в построенном связном графе число рёбер-проводов равно числу рёбер-верёвок.

3) Используя лемму о рукопожатиях, найти общее число рёбер и получить противоречие.

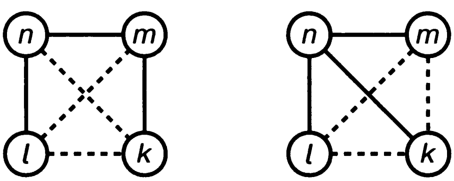
б) Показать, что нужными свойствами может обладать граф, содержащий не более пяти вершин.

Р е ш е н и е. а) Предположим, что электрик Петров справился с заданием. Построим граф локальной электросети. Он содержит 10 пронумерованных вершин, обозначающих столбы. Две вершины соединены ребром, если между соответствующими столбами протянут провод.

Рассмотрим подграф построенного графа, порождённый четырьмя вершинами с номерами $n, m, k, l \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. По предположению вершины подграфа соединены ровно тремя рёбрами. Возможные конфигурации (с точностью до перенумерации вершин) изображены на рисунке.



Выполним дополнительные построения: все пары столбов подграфа, не соединённые проводами, соединим верёвками (пунктирные линии).



Аналогичные действия проведём со всеми подграфами, порождёнными любыми четырьмя вершинами исходного графа, и на их основе построим новый граф, в котором каждая вершина соединена с каждой одним ребром. Подчеркнём, что типы рёбер (ребро-провод или ребро-верёвка) в любом подграфе и в итоговом графе совпадают.

Новый граф является *связным*. Степень каждой из 10 его вершин равна 9. По лемме о рукопожатиях число рёбер нового графа равно

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Заметим, что новый граф содержит равное количество рёбер-проводов и рёбер-верёвок, при этом суммарное число рёбер нечётное. Полученное противоречие означает, что предположение было неверным, и электрик Петров не сможет справиться с заданием.

Утверждение доказано.

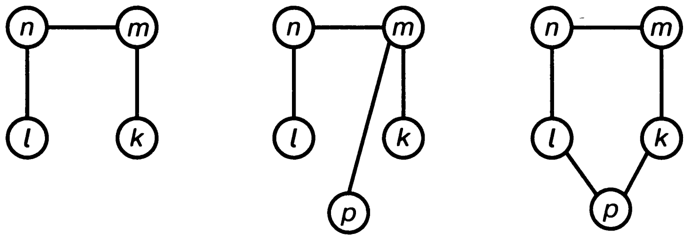
б) В случае 12 вершин схема доказательства пункта а) неприменима, так как суммарное число рёбер связного графа с 12 вершинами равно чётному числу:

$$\frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

Докажем без использования дополнительных построений, что электрик Петров не справится с заданием и при наличии 12 столбов. Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что Петрову сопутствовала удача и он сумел так организовать локальную электросеть, что любые 4 столба из 12 соединены ровно тремя проводами.

Рассмотрим подграф графа локальной электросети, порождённый вершинами $n, m, k, l \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, соединёнными тремя рёбрами.

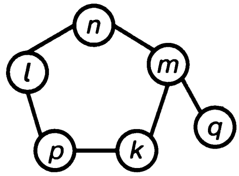
1) Изучим первый возможный вариант подграфа (рисунок слева).

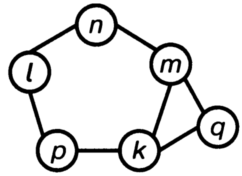


Добавим пятую вершину $p \in \{1, 2, \ldots, 12\}$. Она не может быть изолированной. Если она соединена ребром с одной из вершин подграфа степени 2, например с вершиной m (рисунок в центре), то она должна быть соединена рёбрами и с вершинами n или l и k (для четвёрки вершин n, l, k, p), что приводит к графу, не удовлетворяющему условию задачи (появляется четвёрка вершин, соединённых четырьмя рёбрами вместо трёх). Если же вершина p соединена ребром с одной из двух висячих вершин подграфа, например с вершиной k, то она должна быть соединена ребром и с вершиной l (рисунок справа). Получен интересный промежуточный результат: *если бы в распоряжении электрика Петрова было только* 5 *столбов, то он справился бы с поставленной задачей,* следуя схеме, изображённой на рисунке справа.

Добавляем к последнему подграфу, порождённому пятью вершинами m, n, k, l и p, шестую вершину q. Она не может быть изолированной. Пусть она соединена ребром с вершиной m (рисунок слева), тогда для четвёрки вершин m, n, l, q

условие задачи выполнено, однако, например, для четвёрки вершин l, p, k, q — нет.

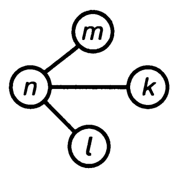




Соединим вершину q с одной из вершин l, p, k, n, например с вершиной k (рисунок справа); для вершин l, p, n доказательство аналогичное. Теперь для вершин l, p, k, q условие задачи выполнено, но для четвёрки вершин m, p, k, q условие нарушается (4 ребра вместо трёх).

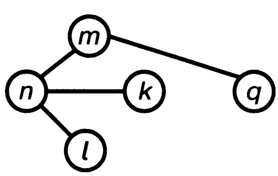
Мы показали, что если электрик Петров соединил произвольные четыре столба по первой схеме, то он не справится с поставленной задачей.

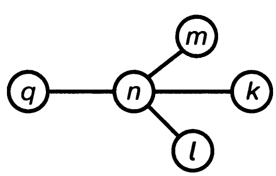
2) Изучим второй возможный вариант подграфа, порождённого четырьмя вершинами n, m, k, l.



Добавим пятую вершину q. Поскольку она не может быть изолированной, рассмотрим соединение её ребром с вершиной m (l и k аналогично) или n.

Если вершина q соединена ребром с вершиной m (рисунок слева), то она должна быть соединена ребром и с одной из вершин l, k или n (для четвёрки l, k, n, q). В этом случае на подграфе найдутся четыре вершины, соединённые четырьмя рёбрами, то есть условие задачи нарушено.





Если же вершина q соединена ребром с вершиной n (рисунок справа), то для четвёрки вершин q, m, k, l должны появиться рёбра q—m, q—k и q—l, что также нарушит условие.

Итак, если электрик Петров соединил произвольные четыре столба по второй схеме, то он также не справится с поставленной задачей.

Ответ. б) Не сумеет.

3. Связность графов. Эйлеровы графы

Задача 1

6-7 Города страны соединены авиалиниями. Известно, что как ни разделить города на две группы, всегда найдётся авиалиния, соединяющая какой-нибудь город первой группы с каким-нибудь городом второй группы. Доказать, что можно перелететь из любого города страны в любой другой (возможно, с пересадками).

Идея. Граф авиалиний страны является связным.

Указания. 1) Построить граф авиасообщения между городами. 2) Показать, что существует маршрут, соединяющий любые две вершины построенного графа.

Решение. Построим граф авиалиний страны. Вершины графа соответствуют городам; две вершины соединим ребром, если между соответствующими городами есть прямое авиасообщение. По условию для любого разбиения множества вершин V на два подмножества V_1 и V_2 существует ребро, соединяющее некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2.

Докажем, что построенный граф связный. Для этого покажем, что для любых двух вершин v, w существует соединяющий их маршрут.

Сначала предположим, что множество V_1 содержит единственную вершину v, а все остальные вершины отнесём к множеству V_2. По условию в графе существует ребро, соединяющее вершину v с одной из вершин множества V_2; обозначим её через u_1.

На следующем шаге вершины v и u_1 отнесём к множеству V_1, а остальные вершины графа — к множеству V_2. По условию в графе найдётся ребро, соединяющее одну из вершин множества V_1 с некоторой вершиной u_2 множества V_2.

Такие построения будем продолжать до тех пор, пока в множестве V_1 не окажется вершина w. Заметим, что по построению подграф, включающий все вершины из V_1, связен. Поскольку v и w — произвольные вершины, граф авиалиний является связным. Это означает, что из любого города страны можно перелететь в любой другой город. Утверждение доказано.

Задача 2

6-7 а) Летом Иван отдыхал в молодёжном лагере «Восход», где вместе с ним находились 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причём у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Доказать, что Иван может узнать адрес Николая, то есть существует цепочка из школьников, которая начинается Иваном и оканчивается Николаем и в которой каждая пара обменялась адресами.

Идея. Граф общения школьников является связным.

Указания. 1) Построить граф общения отдыхающих молодёжного лагеря.

2) Для обоснования связности графа воспользоваться методом доказательства от противного.

3) Предположить, что граф несвязный; рассмотреть компоненту связности с наименьшим числом вершин.

4) Оценить степень вершин выбранной компоненты связности и получить противоречие.

Решение. Построим граф общения отдыхающих молодёжного лагеря «Восход». Вершины графа соответствуют школьникам; две вершины соединены ребром, если соответствующие школьники обменялись адресами. По условию граф содержит 53 вершины; степень каждой вершины не менее 26. Необходимо доказать, что построенный граф связный.

Воспользуемся методом доказательства от противного. Предположим, что граф несвязный. Значит, он состоит из нескольких компонент связности.

Рассмотрим компоненту, содержащую наименьшее число вершин. Число 53 нечётное, поэтому в этой компоненте будет не более 26 вершин ($53 = 27+26$). Но тогда степень любой вершины этой компоненты не превосходит 25, что противоречит условию.

Значит, предположение было неверным и построенный граф является связным. Иван узнает адрес Николая. Утверждение доказано.

Задача 3

$\boxed{7}$ Доказать, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, связный.

Идея. Воспользоваться методом доказательства от противного.

Указания. 1) Предположить, что граф несвязный; рассмотреть компоненту связности с наименьшим числом вершин.
2) Оценить степень вершин выбранной компоненты связности для чётных и нечётных значений n и получить противоречие.

Решение. Воспользуемся схемой доказательства, описанной в предыдущей задаче. Докажем утверждение методом от противного. Предположим, что граф с n вершинами несвязный. Значит, он состоит из нескольких компонент связности. Рассмотрим компоненту, содержащую наименьшее число вершин.

- Если число n чётное, то компонента связности с наименьшим числом вершин будет содержать не более $\frac{n}{2}$ вершин; степень любой вершины этой компоненты не превосходит $\frac{n}{2} - 1$. Заметим, что
$$\frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2}.$$
Полученное неравенство противоречит условию задачи. Значит, предположение о несвязности графа было неверным и граф, содержащий чётное число вершин, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, связный.
- Если число n нечётное, то компонента связности с наименьшим числом вершин будет содержать не более $\frac{n-1}{2}$ вершин; степень любой вершины этой компоненты не превосходит $\frac{n-1}{2} - 1$. Так как
$$\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2} < \frac{n-1}{2},$$
заключаем, что предположение было неверным и граф, содержащий нечётное число вершин, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, также связный.

Утверждение доказано.

Замечание. Доказанное утверждение является *достаточным условием связности графа.*

Задача 4

6-7 Каждый из семи мальчиков имеет не менее трёх родных братьев. Доказать, что все мальчики — братья.

Идея. Граф родства мальчиков связный.

Указания. 1) Построить граф, отражающий родственные связи мальчиков.
2) Используя предыдущую задачу, доказать, что построенный граф связный.
3) Показать, что связный граф родства является полным, то есть любые две вершины такого графа соединены ребром.

Решение. Представим граф, отражающий родственные связи мальчиков. Граф содержит семь вершин, обозначающих мальчиков. Две вершины соединены ребром, если соответствующие мальчики являются родными братьями.

Воспользуемся утверждением, доказанным в предыдущей задаче. В нашем случае $n = 7$, степень каждой вершины графа по условию не менее 3. Так как

$$\frac{n-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3,$$

то согласно *достаточному условию связности графа*, доказанному в предыдущей задаче, граф родственных связей мальчиков является связным. Более того, граф является *полным* (каждая пара вершин соединена ребром), так как если один мальчик имеет несколько братьев, то все эти мальчики — братья.

Утверждение доказано.

Задача 5

6-7 В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами с не менее чем семью другими. Доказать, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Идея. Граф дорог страны Семёрка связный.

Указания. 1) Построить граф дорог.
2) Используя доказанное выше достаточное условие связности графа, показать, что построенный граф связный.

Решение. Построим граф дорог страны Семёрка. Граф содержит 15 вершин, соответствующих городам. Две вершины соединены ребром, если соответствующие города соединены дорогой.

Докажем, что построенный граф связный. В нашей задаче $n = 15$, степень каждой вершины не менее 7. Так как

$$\frac{n-1}{2} = \frac{15-1}{2} = 7,$$

для построенного графа выполнено *достаточное условие связности*. Значит, для любых двух вершин существует связывающий их маршрут, то есть из любого города можно добраться до любого другого.

Утверждение доказано.

Задача 6

$\boxed{6\text{-}7}$ В стране 1974 города. Из столицы выходит 101 авиалиния, а из города Дальний — 1 авиалиния. Из всех остальных городов выходит по 20 авиалиний. Доказать, что из столицы можно прилететь в Дальний, возможно, с пересадками.

Идея. В любом графе число нечётных вершин должно быть чётным.

Указания. 1) Построить граф авиалиний страны.
2) Рассмотреть компоненту связности, содержащую столицу. Показать, используя метод доказательства от противного, что эта компонента должна содержать и город Дальний.

Решение. Построим граф авиалиний страны. По условию он содержит 1974 вершины, обозначающие города. Две вершины соединены ребром, если соответствующие города соединены прямой авиалинией. Вершина, соответствующая столице, имеет степень 101. Вершина, соответствующая городу Дальний, имеет степень 1. Остальные вершины графа степени 20.

Применим подход, описанный в примере 1. Рассмотрим компоненту связности графа авиалиний, содержащую столицу. Докажем, что она содержит также и город Дальний.

Воспользуемся методом доказательства от противного. Предположим, что город Дальний не принадлежит компоненте связности, содержащей столицу. Тогда в этой компоненте из одной вершины (столицы) выходит 101 ребро, а из всех остальных вершин — по 20 рёбер. Значит, в этом графе (компоненте связности) ровно одна нечётная вершина, что противоречит следствию из леммы о рукопожатиях.

Полученное противоречие означает, что предположение было неверным и компонента связности графа авиалиний, содержащая столицу, содержит также и нечётную вершину, соответствующую городу Дальний. Другими словами, из столицы можно прилететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Утверждение доказано.

Задача 7

7 В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Доказать, что:

а) можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;

б) из некоторого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более чем с одной пересадкой (пользоваться можно только выбранным видом транспорта);

в) каждый город обладает свойством, указанным в пункте б);

г) можно выбрать вид транспорта так, чтобы, пользуясь только им, можно было добраться из любого города в любой другой не более чем с двумя пересадками.

Идея. Рассмотреть граф авиасообщения между городами и дополнительный к нему граф железнодорожных маршрутов.

Указания. Представить графы железнодорожного и авиасообщения между городами.

а) Показать, что по крайней мере один из графов является связным, используя утверждение примера 2.

б), в) Рассмотреть две вершины такие, что соединяющий их маршрут на одном из графов имеет длину не менее 2, и перейти к рассмотрению второго графа.

г) Воспользоваться методом доказательства от противного.

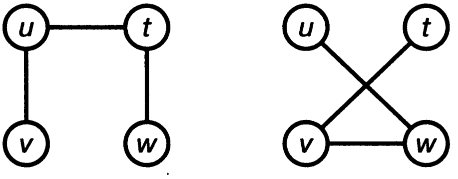
Решение. Рассмотрим два графа G и $\widetilde{G}$, в которых вершины соответствуют городам. В графе G две вершины соединены ребром, если эти города связаны прямой авиалинией. В графе $\widetilde{G}$ две вершины соединены ребром, если эти города связаны железнодорожным маршрутом.

а) Заметим, что по условию две вершины соединены ребром только на одном графе из двух. Значит, граф $\widetilde{G}$ является *дополнительным* к графу G. По утверждению, доказанному в примере 2, хотя бы один из двух построенных графов является связным. Если связным является граф G, то от любого города можно добраться до любого другого на самолёте (возможно, с пересадками). Если связным является граф $\widetilde{G}$, то от одного города до другого можно добраться по железной дороге.

б) Обозначим число вершин графов G и $\widetilde{G}$ через n. Предположим, что в одном из указанных графов (например, в графе G) есть вершина степени $n-1$. Такая вершина удовлетворяет условию пункта б), так как она соединена рёбрами со всеми остальными вершинами графа G, то есть из соответствующего ей города можно добраться самолётом до любого другого города без пересадок.

Далее рассмотрим случай, когда в графах G и $\widetilde{G}$ степени всех вершин не превосходят $n-2$. Выберем произвольную вершину v. Случай, когда из выбранной вершины можно попасть в любую другую вершину по одному или двум рёбрам одного из графов, также интереса не представляет, так как, очевидно, соответствует условию пункта б).

Осталось рассмотреть случай, когда в одном из графов (например, в графе G) есть вершина w такая, что маршрут, соединяющий вершины v и w, проходит по трём или более рёбрам (пример такого подграфа изображён на рисунке слева; рассмотрение маршрутов длины более 3 проводится аналогично).



подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

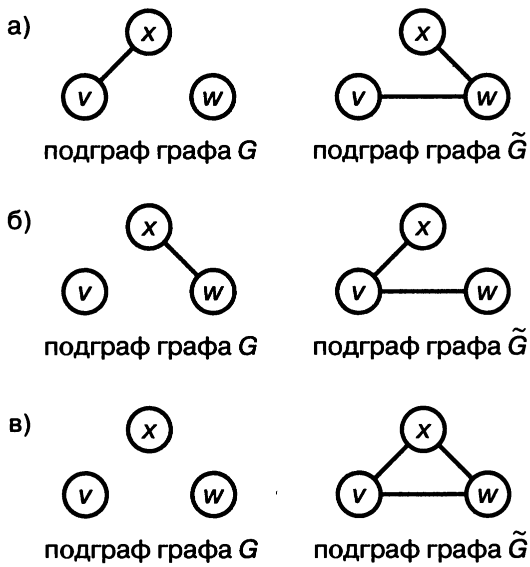
Поскольку в графе G нет ребра, соединяющего вершины v и w, такое ребро есть в графе $\widetilde{G}$ (рисунок справа). Далее, в графе G по предположению нет рёбер (v, t) и (u, w). Значит, такие рёбра есть в графе $\widetilde{G}$. Тогда из города, соответствующего вершине v, можно добраться до каждого из городов u, t, w рассматриваемого маршрута по железной дороге (граф $\widetilde{G}$) не более чем с одной пересадкой.

Осталось показать, что по рёбрам графа $\widetilde{G}$ можно попасть из выбранной вершины v не только в вершины u, t, w, но и в любую другую вершину, при этом длина маршрута не будет превосходить 2.

Замечание. В теории графов *маршрут* — последовательность вершин $v_1, v_2 \ldots, v_n$ и соединяющих их рёбер, в которой каждая пара вершин $v_{i-1}v_i$ соединена ребром; $i = 2, 3, \ldots, n$.

Длиной маршрута называется число входящих в него рёбер с учётом повторений.

Рассмотрим всевозможные тройки вершин v, w, x. Заметим, что в графе G либо есть ребро (v, x), либо есть ребро (w, x), либо указанные три вершины не соединены рёбрами (рисунки а)–в) слева).



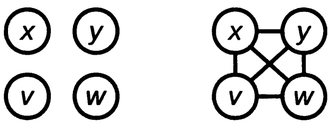
Тогда в графе $\tilde{G}$ вершины v и x будут соединены либо маршрутом длины 2, либо маршрутом длины 1 (рисунки а)–в) справа). Утверждение пункта б) доказано.

в) Рассуждения пункта б) были проведены для произвольной вершины v. Значит, все вершины обладают указанным в пункте б) свойством, а именно, из любого города страны, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более чем с одной пересадкой.

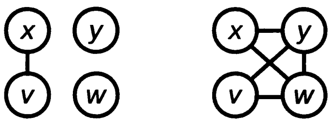
г) Теперь покажем, что можно выбрать вид транспорта так, что, пользуясь только им, пассажир может добраться из любого города в любой другой город не более чем с двумя пересадками.

Докажем утверждение методом от противного. Предположим, что из города, соответствующего вершине v, в город w можно долететь на самолёте только с тремя или более пересадками, а из города x в город y можно добраться на поезде только с тремя или более пересадками. Считаем, что все города различны.

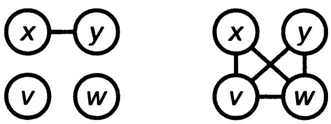
Рассмотрим четыре вершины v, w, x, y. Переберём для них все допустимые конфигурации рёбер графа G, используя первую часть предположения (рисунки слева), и построим соответствующие им подграфы графа $\widetilde{G}$ (рисунки справа).

а) 

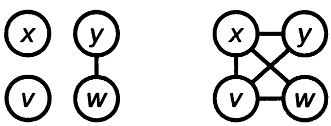
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

б) 

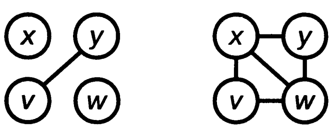
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

в) 

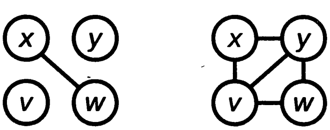
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

г) 

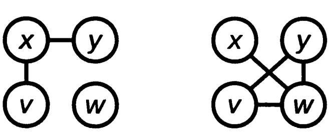
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

д) 

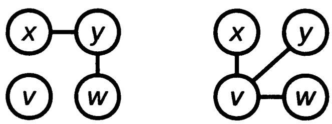
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

е) 

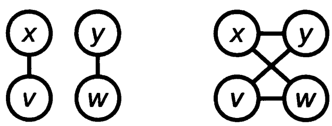
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

ж) 

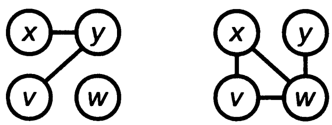
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

з) 

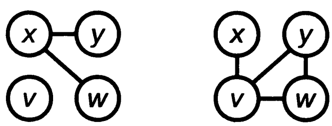
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

и) 

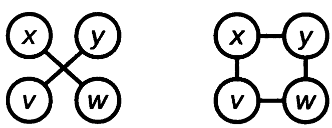
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

к) 

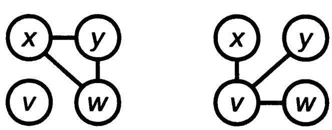
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

л) 

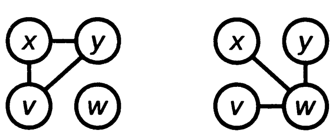
подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

м) 

подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

н) 

подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

о) 

подграф графа G подграф графа $\widetilde{G}$

Заметим, что все изображённые подграфы графа $\widetilde{G}$ являются связными и любой маршрут, соединяющий их вершины, имеет длину не более 2. Этот результат противоречит предположению об отсутствии маршрута, соединяющего вершины x и y, длины менее 3. Полученное противоречие означает, что не могут существовать одновременно два города, для которых самый короткий авиамаршрут включает не менее двух пересадок, и два города, для которых самый короткий железнодорожный маршрут включает не менее двух пересадок. Другими словами, если существуют два города, для которых самый короткий авиамаршрут включает не менее двух пересадок, то из любого города в любой другой можно добраться по железной дороге, сделав не более двух пересадок, и наоборот.

Утверждение доказано.

Задача 8

$\boxed{7}$ В вершинах и пересечениях диагоналей выпуклого многоугольника расположены трамвайные остановки, причём известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. На некоторых диагоналях-улицах введено трамвайное движение так, что мимо каждой остановки проходит хотя бы один трамвайный путь. Доказать, что от любой остановки до любой другой можно добраться на трамвае, сделав не более двух пересадок.

Идея. В любом четырёхугольнике, образованном вершинами исходного многоугольника, трамвайный маршрут проходит по крайней мере по одной диагонали.

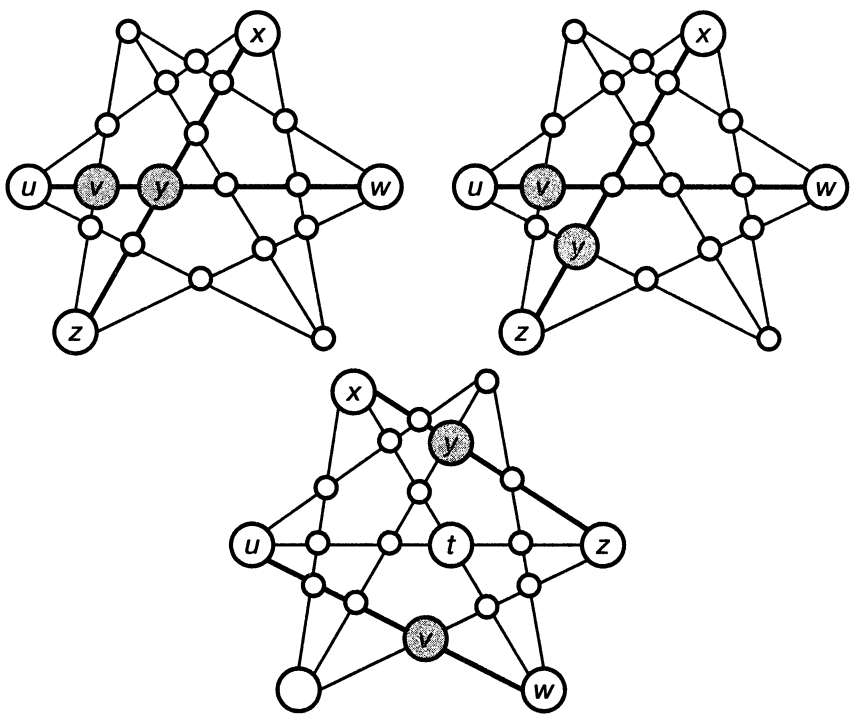
Указания. 1) Рассмотреть случай, когда вершины расположены на пересекающихся диагоналях выпуклого многоугольника. Показать, что для таких вершин существует соединяющий их маршрут, содержащий не более одной пересадки.

2) Рассмотреть случай, кода вершины расположены на непересекающихся диагоналях многоугольника. Показать, что для таких вершин существует соединяющий их маршрут, содержащий не более двух пересадок.

Решение. Рассмотрим граф трамвайного сообщения. Вершины графа соответствуют остановкам; две вершины соединены ребром, если соответствующие остановки соединены трамвайными путями.

Выберем любые две вершины v и y, через которые проходят маршруты $u - v - w$ и $x - y - z$, где отрезки uw и xz являются диагоналями выпуклого многоугольника (см. рисунок).

- Если обе вершины v и y графа принадлежат либо диагонали uw многоугольника, либо диагонали xz, то пересадки не потребуется (рисунок вверху слева).
- Если вершины v и y принадлежат пересекающимся диагоналям uw и xz многоугольника (соответственно), но не совпадают с точкой пересечения указанных диагоналей, то от остановки v до остановки y можно добраться с одной пересадкой (рисунок вверху справа).
- Рассмотрим случай, когда диагонали uw и xz не пересекаются (нижний рисунок). Обозначим через t точку пересечения диагоналей четырёхугольника $xzwu$. По условию через вершину t должен проходить хотя бы один трамвайный маршрут, и это может быть либо маршрут uz, либо маршрут xw. Пусть это маршрут uz. Тогда из вершины v графа можно добраться до вершины u, затем до вершины z и далее до вершины y.



Утверждение доказано.

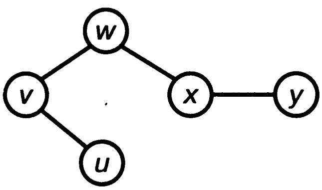
Задача 9

[6-7] Система точек, соединённых отрезками, называется «связной», если из любой точки можно пройти в любую другую по этим отрезкам. Можно ли соединить пять точек в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)

Идея. Привести пример.

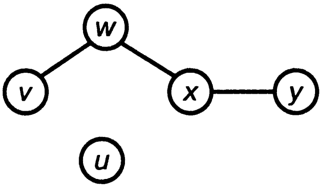
Указания. 1) Рассмотреть маршрут, соединяющий пять точек, все рёбра которого различны.
2) Показать, что построенный маршрут удовлетворяет условию.

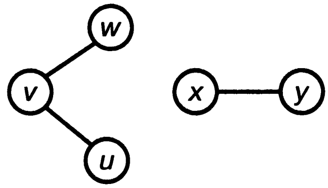
Решение. Приведём пример графа, удовлетворяющего условию задачи. Соединим пять точек в незамкнутую простую цепь.



Замечание. *Цепью* (*путём*) называется маршрут графа, все рёбра которого различны. *Незамкнутая цепь* (*незамкнутый путь*) — цепь, начало которой не совпадает с её концом. *Простая цепь* (*простой путь*) — цепь, у которой все вершины, кроме, возможно, крайних, различны.

Изображённая цепь является связным графом. При удалении одного из рёбер цепь распадётся на две компоненты связности, содержащие одну и четыре или две и три вершины. Примеры изображены на рисунках.





Ответ. Можно.

Замечание. Приведённый в задаче граф является *эйлеровым*.

Задача 10

6-7 В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Доказать, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

Идея. В графе число вершин нечётной степени должно быть чётным.

Указания. 1) Построить граф дорог.
2) Предположить, что при перекрытии одной дороги граф распадается на две компоненты связности.
3) Определить степени вершин каждой компоненты связности и воспользоваться леммой о рукопожатиях.

Решение. Рассмотрим связный граф, содержащий более 100 вершин, соответствующих городам, степени 100.

Предположим, что при удалении ребра, соединяющего две вершины v и w, граф распадается на две компоненты связности, одна из которых содержит вершину v, а вторая — вершину w. В каждой компоненте связности все вершины, кроме одной, степени 100, а одна вершина степени 99. Эта ситуация невозможна — из леммы о рукопожатиях следует, что сумма степеней всех вершин графа является чётным числом.

Полученное противоречие означает, что предположение было неверным. При удалении любого ребра построенного графа он останется связным, то есть, несмотря на перекрытие одной дороги, можно построить маршрут, соединяющий любые два города страны.

Задача 11

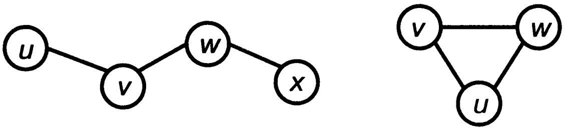
7 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно раскрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой раскраски?

Идея. Граф телефонных линий может содержать компоненты связности только двух типов: незамкнутые простые пути и простые циклы.

Указания. 1) Рассмотреть компоненты связности графа телефонных линий.
2) Показать, что рёбра незамкнутых простых путей можно покрасить в два цвета, а рёбра простых циклов — в три цвета.

Решение. Рассмотрим граф телефонной линии. Он содержит 20 вершин степени 1 или 2. Две вершины соединены ребром, если соответствующие этим вершинам телефоны соединены проводом.

Так как из каждой вершины выходит не более двух рёбер, то полученный граф может содержать компоненты связности двух типов: незамкнутые простые пути и простые циклы. Примеры изображены на рисунке.



незамкнутый простой путь простой цикл

Замечание. *Цикл* — цепь, начало которой совпадает с её концом. *Простой цикл* — цикл, у которого все вершины различны.

Рёбра незамкнутого простого пути можно покрасить в два цвета, чередуя цвета. Рёбра простого цикла с чётным числом вершин также можно покрасить в два цвета, чередуя цвета. Рёбра простого цикла с нечётным числом вершин можно покрасить в три цвета. Для этого достаточно одно ребро покрасить в цвет 1, а остальные покрасить через одно в цвета 2 и 3.

Итак, искомое число красок равно трём.

Ответ. Три краски.

Задача 12

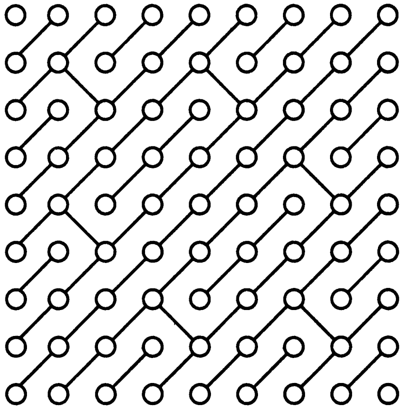
$\boxed{7}$ В каждой клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Может ли количество этих частей быть
а) больше 15;
б) больше 20?

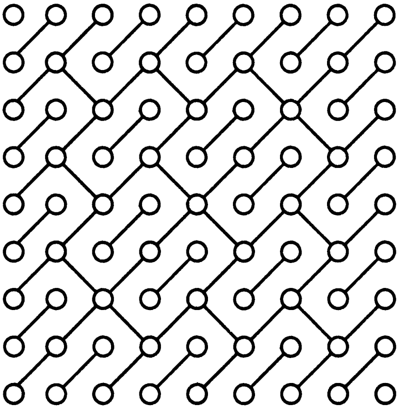
Идея. Привести примеры.

Указания. 1) Взять за основу граф, в котором все рёбра (диагонали клеток) параллельны.
2) Изменить направление нескольких рёбер и получить требуемое число компонент связности графа с числом вершин не менее двух.

Решение. Построим графы, иллюстрирующие пункты а) и б) условия. Вершины графов соответствуют вершинам клеток, рёбра графов — выбранные определённым образом диагонали клеток.

а) Первый граф изображён на рисунке слева. Он содержит 17 компонент связности, удовлетворяющих условию пункта а), а именно: десять незамкнутых простых цепей длины 1, две незамкнутые простые цепи длины 2, одну незамкнутую простую цепь длины 8, 2 компоненты связности, содержащие по 8 вершин, и 2 компоненты, содержащие по 14 вершин.





б) Второй граф изображён на рисунке справа. Он содержит 21 компоненту связности, удовлетворяющую условию пункта б), а именно: двадцать незамкнутых простых цепей длины 1 и одну компоненту связности, содержащую 39 вершин.

Ответ. а) Может; б) может.

Задача 13

7 Каждый из 450 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Доказать, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не бил.

Идея. При построении графа взаимоотношений в парламенте использовать информацию о единственном известном факте рукоприкладства для каждого депутата.

Указания. 1) Построить граф пощёчин и дополнительный граф.
2) Предположить, что в дополнительном графе есть полный подграф; оценить число не попавших в него вершин и получить оценку для числа вершин в подграфе.

Решение. Построим два графа: граф G рукоприкладства депутатов парламента и дополнительный граф $\widetilde{G}$ лояльности депутатов. Графы содержат по 450 вершин, соответствующих депутатам. В графе G две вершины соединены ребром, если либо один из депутатов дал пощёчину другому, либо депутаты обменялись пощёчинами. В дополнительном графе $\widetilde{G}$ две вершины соединены ребром, если соответствующие этим вершинам депутаты не обменивались пощёчинами. Необходимо доказать, что граф $\widetilde{G}$ содержит полный подграф, включающий не менее 150 вершин.

Рассмотрим наибольший *полный* подграф графа $\widetilde{G}$. Пусть он включает k вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$; $k < 450$. Депутаты этого подграфа не давали пощёчин друг другу. Тогда депутаты $v_{k+1}, \ldots, v_{450}$ либо дали пощёчину депутатам рассматриваемого полного подграфа, либо получили от них пощёчину. По условию депутатов, давших пощёчину депутатам подграфа, не может быть больше k; депутатов, получивших пощёчину от депутатов подграфа, также не может быть больше k. Получаем неравенство

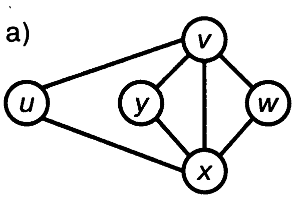
$$450 - k \leqslant k + k \iff k \geqslant 150.$$

Утверждение доказано.

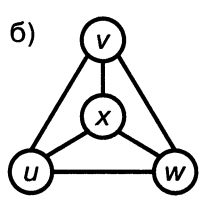
Задача 14

$\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли нарисовать графы, изображённые на рисунках а) и б), не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз (то есть являются ли эти графы эйлеровыми)?

а)



б)



Идея. В эйлеровом графе может быть не более двух вершин нечётной степени.

Указания. а) Привести пример маршрута.

б) Доказать, что нужный маршрут не существует, используя информацию о степенях вершин.

Решение. а) Рассмотрим маршрут

$$u \to v \to w \to x \to y \to v \to x.$$

Он может быть нарисован без отрыва карандаша от бумаги; при этом по каждому ребру карандаш проходит один раз. Значит, граф на рисунке а) удовлетворяет определению эйлерова графа.

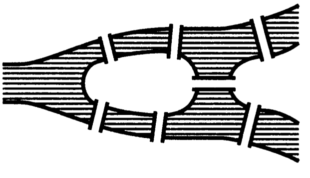
б) Изображённый на рисунке б) граф содержит четыре вершины степени 3. Этот граф не может быть эйлеровым, поскольку одним из свойств эйлеровых графов является наличие не более двух вершин нечётной степени.

Ответ. а) Да; б) нет.

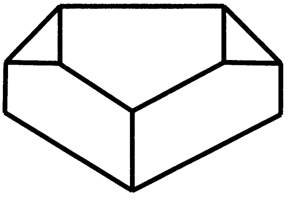
Задача 15

6-7 а) Художник-авангардист нарисовал картину «Контур квадрата и его диагонали». Мог ли он нарисовать свою картину, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды?

б) Схема мостов Кёнигсберга изображена на рисунке. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?



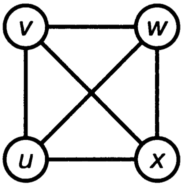
в) Хулиган Вася решил прогуляться по парку и его окрестностям (см. рисунок) так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз. Сможет ли он это сделать?



Идея. Эйлеров граф может содержать не более двух вершин нечётной степени.

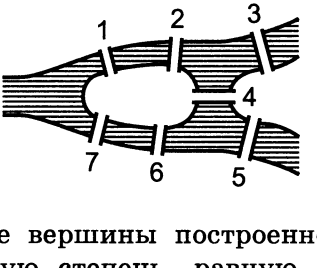
Указание. Доказать, что граф не является эйлеровым, анализируя степени вершин.

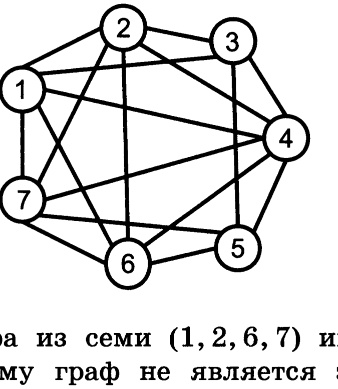
Решение. а) Изобразим граф, соответствующий рисунку художника.



Изображённый граф содержит четыре вершины степени 3. Значит, он не является эйлеровым, поскольку в эйлеровом графе может быть не более двух вершин нечётной степени. Другими словами, художник не может нарисовать контур квадрата и его диагонали, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждую линию только один раз.

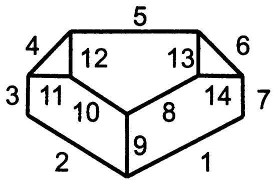
б) Построим граф прогулки по мостам Кёнигсберга. Вершины графа соответствуют мостам; две вершины соединим ребром, если по соответствующим мостам можно пройти, не используя третий мост.





Четыре вершины построенного графа из семи $(1, 2, 6, 7)$ имеют нечётную степень, равную 5, поэтому граф не является эйлеровым (в эйлеровом графе может быть не более двух вершин нечётной степени). Этот вывод означает, что в Кёнигсберге нельзя совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

в) Представим граф передвижения Васи по парку и его окрестностям. Пронумеруем заборы. Вершины графа будут соответствовать заборам; две вершины соединим ребром, если через соответствующие два забора можно перелезть, не перелезая через третий забор.



Выпишем смежные вершины для каждой из 14 вершин графа.

1) Вершина 1: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14.
2) Вершина 2: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11.
3) Вершина 3: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11.
4) Вершина 4: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12.
5) Вершина 5: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13.
6) Вершина 6: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 14.
7) Вершина 7: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 14.
8) Вершина 8: 1, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 14.
9) Вершина 9: 1, 2, 3, 7, 8, 10, 11, 14.
10) Вершина 10: 2, 3, 5, 8, 9, 11, 12, 13.
11) Вершина 11: 2, 3, 4, 9, 10, 12.
12) Вершина 12: 4, 5, 8, 10, 11, 13.
13) Вершина 13: 5, 6, 8, 10, 12, 14.
14) Вершина 14: 1, 6, 7, 8, 9, 13.

Четыре вершины рассматриваемого графа из 14 имеют нечётную степень, поэтому граф не является эйлеровым. Это значит, что хулиган Вася не сможет прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз.

Ответ. а) Нет; б) нельзя; в) нет.

Задача 16

6-7 Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого острова. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист

а) не с него начал и не на нём закончил;
б) с него начал, но не на нём закончил;
в) с него начал и на нём закончил?

Идея. В эйлеровом графе степени всех вершин, за исключением, возможно, первой и последней в маршруте, чётные.

Указания. Построить эйлеров граф путешествия туриста.

а) Вершина, соответствующая острову Троекратный, является внутренней вершиной маршрута эйлерова графа.

б) Вершина, соответствующая острову Троекратный, является начальной вершиной маршрута графа, но не является конечной вершиной.

в) Вершина, соответствующая острову Троекратный, является и начальной вершиной маршрута, и конечной.

Решение. Построим граф перемещений туриста. Вершины графа соответствуют островам; две вершины соединены ребром, если соответствующие им острова соединены мостом. По условию турист прошёл по каждому мосту ровно один раз. Значит, построенный граф является эйлеровым.

а) Вершина, соответствующая острову Троекратный, является внутренней вершиной маршрута. Поскольку на Троекратном турист побывал трижды, степень этой вершины чётная и равна $3 \cdot 2 = 6$, то есть к Троекратному ведёт шесть мостов.

б) Вершина, соответствующая острову Троекратный, является начальной вершиной маршрута, но не является конечной. Значит, степень этой вершины нечётная и равна $1 + 2 \cdot 2 = 5$.

в) Вершина, соответствующая острову Троекратный, является и начальной вершиной маршрута, и конечной. Значит, степень этой вершины равна $1 + 2 + 1 = 4$.

Ответ. а) 6 мостов; б) 5 мостов; в) 4 моста.

Задача 17

6-7 а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

б) Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы изготовить требуемый каркас?

Идея. Эйлеров граф может содержать не более двух вершин нечётной степени.

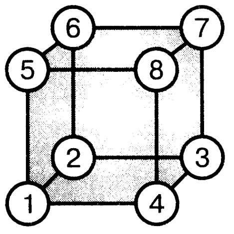
Указания. Построить граф, соответствующий кубу.

а) Доказать, что граф не является эйлеровым, определив степени вершин.

б) Учесть, что каждая пара вершин нечётной степени, за исключением первой вершины маршрута и последней, должна быть соединена отдельным куском проволоки.

Решение. Куб содержит 12 рёбер. Значит, куска проволоки длиной 120 см хватит ровно на 12 рёбер куба длины 10 см.

а) Представим граф, вершины которого соответствуют вершинам куба, а рёбра — рёбрам куба. Необходимо определить, является ли этот граф эйлеровым.

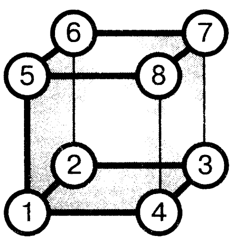


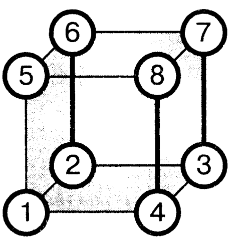
Граф содержит восемь вершин степени 3. В эйлеровом графе может быть не более двух вершин нечётной степени, поэтому данный граф эйлеровым не является. Значит, из куска проволоки длиной 120 см нельзя изготовить каркас куба с ребром 10 см, не ломая проволоки.

б) Поскольку у куба восемь нечётных вершин, для изготовления его каркаса придётся не менее трёх раз ломать проволоку, чтобы получить 4 части. Одна схема изготовления каркаса куба, предполагающая наименьшее число разрывов проволоки, изображена на рисунке. Её можно описать так:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 5,$$

$$2 \to 6, \quad 3 \to 7, \quad 4 \to 8.$$

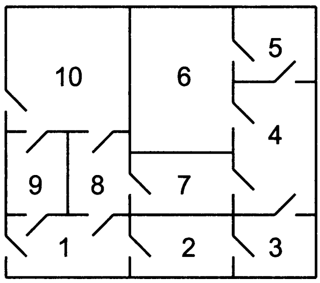




Ответ. а) Нет; б) 3 раза.

Задача 18

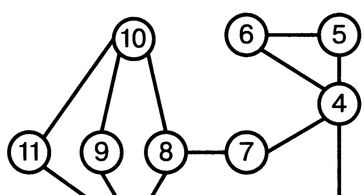
6-7 а) На рисунке изображён план подвала из 10 комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение?



Идея. Граф подвала должен быть эйлеровым.

Указания. 1) Построить граф подвала, добавив к вершинам, соответствующим комнатам, вершину, обозначающую внешний мир.
2) Найти две вершины нечётной степени, построить соединяющий их маршрут и убедиться в том, что граф эйлеров.

Решение. Изобразим граф подвала. Вершины графа с номерами $1, 2, \ldots, 10$ обозначают комнаты, вершина 11 соответствует внешнему миру; две вершины соединены ребром, если между соответствующими комнатами есть дверь.



Граф содержит две вершины нечётной степени (с номерами 8 и 10). Если граф эйлеров, то одна из вершин нечётной степени должна быть первой вершиной маршрута, а вторая — последней. Построим такие маршруты. Предположим, что маршрут начинается в вершине 8:

$$8 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 9 \to 10 \to 11 \to$$
$$\to 1 \to 8 \to 10.$$

Следуя указанной схеме и запирая каждую дверь, через которую проходит, посетитель окажется закрытым в комнате 10.

Если же посетитель начнёт движение с комнаты 10, то, заперев все двери, окажется изолированным в комнате 8:

$$10 \to 11 \to 1 \to 9 \to 10 \to 8 \to$$
$$\to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 4 \to 7 \to 8.$$

Ответ. Можно; с восьмой или десятой комнаты.

4. Маршруты, цепи, циклы, двудольные графы

Задача 1

(6-7) В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?

Идея. Число рёбер полного двудольного графа теннисного турнира равно суммарному числу побед игроков двух команд.

Указания. 1) Построить граф теннисного турнира.
2) Ввести переменные, равные числу игр в турнире и числу побед команды «красных»; составить уравнение для суммарного числа рёбер в графе; решить уравнение на множестве натуральных чисел.

Решение. Построим граф теннисного турнира. Вершины соответствуют игрокам турнира, рёбра — сыгранным матчам. Из условия задачи следует, что граф является полным двудольным, так как каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных», а матчей внутри команд не было.

Пусть число игроков в каждой команде равно n ($n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant 8$), число побед «красных» равно k, тогда число побед «синих» равно $4k$ ($k \in \mathbb{N}$). Составим уравнение для общего числа рёбер в графе:

$$k + 4k = n^2 \iff 5k = n^2.$$

Из последнего уравнения следует, что число n кратно пяти. Учитывая ограничение $n \leqslant 8$, заключаем, что $n = 5$, при этом $k = 5$. В каждой команде было по $n = 5$ игроков.

Ответ. По 5 игроков.

Задача 2

6-7 Каждый город одной страны соединён с каждым городом другой страны ровно одним авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Рейсов первой авиакомпании в 6 раз больше, чем рейсов второй. Сколько городов может быть в странах, если известно, что в каждой из них не больше 10 городов и в одной стране на один город больше, чем в другой?

Идея. Число рёбер полного двудольного графа авиасообщения между двумя странами равно суммарному числу рейсов двух авиакомпаний.

Указания. 1) Построить граф международного авиасообщения двух стран.
2) Ввести переменные, равные числу городов в одной из стран и числу рейсов первой авиакомпании; составить уравнение для суммарного числа рёбер в графе; решить уравнение на множестве натуральных чисел.

Решение. Рассмотрим граф международного авиасообщения двух стран. Вершины соответствуют городам, рёбра — авиарейсам. Из условия задачи следует, что такой граф является полным двудольным, так как любая пара городов из разных стран связана ровно одним авиарейсом, а внутренние рейсы в графе не учитываются.

Обозначим через n число городов в первой стране, тогда во второй стране $n+1$ город ($n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant 9$). Пусть k — число рейсов второй авиакомпании ($k \in \mathbb{N}$). Составим уравнение для общего числа рёбер в графе:

$$k + 6k = n(n+1) \iff 7k = n(n+1).$$

В правой части последнего уравнения стоит произведение двух последовательных натуральных чисел, одно из которых кратно простому числу 7. Значит, учитывая ограничение $n \leqslant 9$, получаем два ответа: либо $n = 6$, $k = 6$, либо $n = 7$, $k = 8$.

Ответ. 6 и 7 городов или 7 и 8 городов.

Задача 3

6-7 В двух делегациях вместе 22 человека. При встрече члены одной делегации обменялись рукопожатиями с членами другой делегации. Всего было сделано 121 рукопожатие. Доказать, что в делегациях одинаковое число членов.

Идея. Число рёбер полного двудольного графа рукопожатий равно 121.

Указания. 1) Построить граф рукопожатий.
2) Ввести переменную n, равную числу членов первой делегации; составить уравнение для числа рёбер в графе; убедиться в том, что уравнение имеет единственное решение $n = 11$.

Решение. Построим граф рукопожатий членов делегаций. Вершины графа соответствуют членам делегаций, рёбра фиксируют факт рукопожатия. Построенный граф является полным двудольным графом.

Обозначим через n число членов первой делегации ($n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant 21$) и составим уравнение для суммарного числа рукопожатий:

$$n(22 - n) = 121.$$

В левой части уравнения стоит произведение двух нечётных натуральных чисел. Поскольку $121 = 11^2$, множители n и $22 - n$ могут принимать значения из множества $\{1; 11; 121\}$. Проверкой убеждаемся, что подходит единственная пара значений $n = 11$, $22 - n = 11$. Значит, в делегациях одинаковое число членов, равное 11.

Утверждение доказано.

Задача 4

$\boxed{6\text{-}7}$ За столом сидят 5 мальчиков и 7 девочек, а на столе в вазе лежат конфеты. Некоторые из детей знакомы. Каждая девочка дала по конфете из вазы знакомому мальчику, а затем каждый мальчик дал по конфете из вазы незнакомой девочке. После этого в вазе не осталось конфет. Сколько конфет было в вазе?

Идея. Число конфет в вазе равно числу рёбер в полном двудольном графе угощения конфетами.

Указания. 1) Построить полный двудольный граф передачи конфет мальчиками и девочками.
2) Число конфет в вазе равно числу рёбер графа.

Решение. Построим двудольный граф передачи конфет мальчиками и девочками. Вершины первой доли соответствуют мальчикам, вершины второй доли соответствуют девочкам. Соединим ребром вершину первой доли с вершиной второй доли, если в соответствующей паре «мальчик-девочка» состоялась передача конфеты.

Построенный граф является полным: каждая девочка передала конфеты знакомым мальчикам и получила конфеты от незнакомых мальчиков, то есть каждая вершина второй доли соединена со всеми вершинами первой доли. В графе $5 \cdot 7 = 35$ рёбер. Значит, в вазе было 35 конфет.

Ответ. 35 конфет.

Задача 5

6-7 Каждый город одной страны соединён авиарейсами более чем с половиной городов другой страны. Из-за забастовки авиадиспетчеров в странах внутренние авиарейсы были отменены и остались только международные. Доказать, что, пользуясь ими, можно добраться из любого города одной страны в любой город этой же страны, сделав ровно одну пересадку.

Идея. В двудольном графе международного авиасообщения стран существуют цепи длины 2, связывающие две вершины одной доли.

Указания. 1) Построить двудольный граф международного авиасообщения между двумя странами.
2) Используя условие задачи, показать, что любые две вершины одной доли можно связать цепью длины 2.

Решение. Построим граф международного авиасообщения между двумя странами после отмены внутренних рейсов. Вершины соответствуют городам, рёбра — авиарейсам. Граф является двудольным.

Рассмотрим две вершины одной доли. Так как по условию каждая из них смежна более чем с половиной вершин другой доли, то существует вершина второй доли, смежная с каждой из двух выбранных вершин первой доли. Значит, для любых двух вершин одной доли существует соединяющая их цепь с одной промежуточной вершиной. Эта цепь и определяет маршрут перелёта с одной пересадкой.

Утверждение доказано.

Задача 6

6-7 Каждый из учеников 9«а» класса дружит ровно с тремя учениками 9«б» класса, а каждый ученик 9«б» класса дружит ровно с тремя учениками 9«а» класса. Доказать, что число учеников в этих классах одинаково.

Идея. Суммы степеней вершин долей двудольного графа равны.

Указания. 1) Построить двудольный граф дружбы учеников двух классов.
2) Воспользоваться теоремой о сумме степеней вершин двудольного графа.

Решение. Построим граф дружбы учеников двух классов. Вершины соответствуют ученикам; две вершины соединены ребром, если соответствующие ученики дружат. По условию каждая вершина графа имеет степень, равную 3. Граф является двудольным.

Пусть в доле, соответствующей 9«а» классу, m вершин, а в доле, соответствующей 9«б» классу, n вершин; $m, n \in \mathbb{N}$. По теореме о сумме степеней вершин двудольного графа (см. пример 4)

$$3m = 3n \iff m = n.$$

Значит, число учеников в классах 9«а» и 9«б» одинаково.

Утверждение доказано.

Задача 7

$\boxed{6\text{-}7}$ В классе 12 мальчиков и 16 девочек. Каждая девочка дружит ровно с тремя мальчиками. Количество девочек, с которыми дружат мальчики, одинаково. Со сколькими девочками дружит каждый мальчик?

Идея. Суммы степеней вершин долей двудольного графа равны.

Указания. 1) Построить двудольный граф дружбы мальчиков и девочек.
2) Воспользоваться теоремой о сумме степеней вершин двудольного графа.

Решение. Построим граф дружбы девочек и мальчиков. Вершины соответствуют ученикам; две вершины соединены ребром, если соответствующие ученики дружат. Граф является двудольным. В доле, соответствующей девочкам, 16 вершин степени 3. В доле, соответствующей мальчикам, 12 вершин одинаковой степени. Обозначим степень вершины доли мальчиков через n ($n \in \mathbb{N}$). По теореме о сумме степеней вершин двудольного графа (пример 4)

$$16 \cdot 3 = 12 \cdot n \iff n = 4.$$

Значит, каждый мальчик дружит с четырьмя девочками.

Ответ. С четырьмя девочками.

Задача 8

$\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли так нарисовать 5 горизонтальных и 4 вертикальных отрезка, чтобы каждый горизонтальный отрезок пересекался ровно с тремя вертикальными, а каждый вертикальный — ровно с четырьмя горизонтальными?

Идея. Воспользоваться методом доказательства от противного и получить результат, противоречащий теореме о сумме степеней вершин двудольного графа.

Указания. 1) Предположить, что нужный рисунок существует; представить соответствующий ему двудольный граф.
2) Найти суммы степеней вершин разных долей и получить несоответствие с теоремой о сумме степеней вершин двудольного графа.

Решение. Предположим, что требуемый в условии рисунок выполнен. Значит, существует граф, вершины которого обозначают отрезки, в котором две вершины соединены ребром, если соответствующие отрезки пересекаются. Граф является двудольным, поскольку различные вертикальные отрезки не пересекаются, различные горизонтальные отрезки также не могут пересечься.

В доле, соответствующей горизонтальным отрезкам, 5 вершин степени 3. В доле, соответствующей вертикальным отрезкам, 4 вершины степени 4. Сумма степеней вершин первой доли ($5 \cdot 3 = 15$) не равна сумме степеней вершин второй доли ($4 \cdot 4 = 16$). Этот результат противоречит теореме о сумме степеней вершин двудольного графа (пример 4).

Полученное противоречие означает, что предположение было неверным, то есть не существует двудольного графа, иллюстрирующего условие задачи. Другими словами, нельзя нарисовать 5 горизонтальных и 4 вертикальных отрезка так, чтобы каждый горизонтальный отрезок пересекался ровно с тремя вертикальными, а каждый вертикальный — ровно с четырьмя горизонтальными.

Ответ. Нет.

Задача 9

$\boxed{6\text{-}7}$ В двух странах вместе 11 городов. Между некоторыми городами разных стран открыты авиарейсы (не более одного между двумя городами). Известно, что один город соединён рейсами с семью, один — с пятью, пять — с двумя, четыре — с одним городом. Сколько городов в странах?

Идея. Суммы степеней вершин долей двудольного графа равны.

Указания. 1) Построить двудольный граф международного авиасообщения.
2) Разбить вершины на две доли, используя теорему о сумме степеней вершин двудольного графа.

Решение. Построим граф международных авиалиний, соединяющих две страны. Вершины соответствуют городам; две вершины соединены ребром, если между соответствующими городами открыт авиарейс. Граф является двудольным. Из условия известно общее число вершин графа (11) и степени вершин $(7, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$, но не известно распределение вершин по долям.

Необходимо так распределить вершины по долям, чтобы полученный граф соответствовал теореме о сумме степеней вершин двудольного графа (пример 4), а именно, чтобы суммы степеней вершин долей двудольного графа стали равными.

Найдём сумму степеней всех вершин графа:

$$7 + 5 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 26.$$

Значит, сумма степеней вершин одной доли равна $26 : 2 = 13$. Назовём первой ту долю, в которой есть вершина наибольшей степени, равной 7; выпишем все возможные распределения вершин по долям.

1) 1-я доля: 7,5,1; 2-я доля: 2,2,2,2,2,1,1,1;
2) 1-я доля: 7,2,2,2; 2-я доля: 5,2,2,1,1,1,1;
3) 1-я доля: 7,2,2,1,1; 2-я доля: 5,2,2,2,1,1;
4) 1-я доля: 7,2,1,1,1,1; 2-я доля: 5,2,2,2,2.

Проверим, существуют ли такие двудольные графы. Вариант (2) невозможен, так как во второй доле есть вершина степени 5, а в первой доле всего 4 вершины. Варианты (3) и (4) также невозможны, поскольку в первой доле в них есть вершина степени 7, а число вершин во второй доле меньше семи.

Остаётся единственный вариант (1): в одной стране 3 города, а во второй — 8 городов.

Ответ. 3 города и 8 городов.

Задача 10

$\boxed{6\text{-}7}$ В классе каждый мальчик дружит ровно с четырьмя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. В классе 16 парт, а на последней экскурсии было 23 школьника. Сколько учеников в классе?

Идея. Суммы степеней вершин долей двудольного графа равны.

Указания. 1) Построить двудольный граф дружбы мальчиков и девочек в классе.
2) Ввести переменные, равные числу вершин долей графа. Составить уравнение, используя теорему о сумме степеней вершин двудольного графа.
3) Учесть ограничения на общее число вершин графа.

Решение. Построим граф дружбы мальчиков и девочек в классе. Вершины соответствуют ученикам; две вершины соединены ребром, если соответствующие ученики дружат. Граф является двудольным. Вершины первой доли соответствуют мальчикам, их степени равны 4; вершины второй доли соответствуют девочкам, их степени равны 3.

Введём две переменные: m — число девочек в классе, n — число мальчиков, $m, n \in \mathbb{N}$. По теореме о сумме степеней вершин двудольного графа справедливо равенство

$$4n = 3m.$$

Необходимо найти значения введённых переменных, удовлетворяющие двойному неравенству

$$23 \leqslant m + n \leqslant 32.$$

Из уравнения получаем $m = \frac{4}{3}n$. Подставим эту зависимость в неравенство:

$$23 \leqslant \frac{4}{3}n + n \leqslant 32 \iff 23 \leqslant \frac{7}{3}n \leqslant 32 \iff 9\frac{6}{7} \leqslant n \leqslant 13\frac{5}{7}.$$

Из уравнения следует, что число n должно быть кратно трём. Получаем единственное решение двойного неравенства $n = 12$. Тогда $m = 16$, и число учеников в классе равно $12 + 16 = 28$.

Ответ. 28 учеников.

Задача 11

$\boxed{6\text{-}7}$ В школе, где учатся 6 друзей: Вася, Серёжа, Женя, Коля, Петя и Миша, работает несколько кружков. Известно, что каждый из кружков посещают пятеро из друзей, причём Вася посещает больше всех кружков — 8, а Миша меньше всех — 5. Сколько кружков в школе?

Идея. Суммы степеней вершин долей двудольного графа равны.

Указания. 1) Построить двудольный граф, вершинами которого являются ученики (первая доля) и кружки (вторая доля).
2) Составить двойное неравенство для суммы степеней вершин второй доли; решить полученное неравенство на множестве натуральных чисел.
3) Выбрать единственно возможное значение для числа вершин второй доли, учитывая информацию о степенях вершин первой доли.

Решение. Построим двудольный граф посещения кружков друзьями. Шесть вершин первой доли соответствуют ученикам; наибольшую степень, равную восьми, имеет вершина, соответствующая Васе; наименьшую степень, равную пяти, имеет вершина, соответствующая Мише. Остальные четыре вершины первой доли имеют степень 6 или 7. Значит, минимальное значение суммы степеней вершин первой доли равно $8+5+4\cdot 6=37$, а максимальное — $8+5+4\cdot 7=41$.

Обозначим число вершин второй доли через n ($n\in\mathbb{N}$). Все вершины второй доли имеют степень, равную пяти. Значит, сумма степеней вершин второй доли $5n$.

Составим двойное неравенство для суммы степеней вершин второй доли:

$$37 \leqslant 5n \leqslant 41 \iff 7\frac{2}{5} \leqslant n \leqslant 8\frac{1}{5}.$$

Полученному двойному неравенству удовлетворяет значение $n=8$.

При $n=8$ сумма степеней вершин первой доли, соответствующих Серёже, Жене, Коле и Пете, равна $8\cdot 5-8-5=27$. Можно предложить следующее распределение степеней этих вершин: $7, 7, 7, 6$.

Ответ. 8 кружков.

Задача 12

[6-7] В некоторой группе людей у каждого есть один враг и один друг. (Если A — друг (враг) B, то B — друг (враг) A.) Доказать, что этих людей можно разбить на две компании так, что в каждой компании не будет ни врагов, ни друзей.

Идея. Воспользоваться теоремой Кёнига.

Указания. 1) Построить граф взаимоотношений в группе. Рассмотреть два вида рёбер.
2) Показать, что любая связная компонента графа является циклом чётной длины. Применить теорему Кёнига.

Решение. Построим граф взаимоотношений в группе. Вершины соответствуют членам группы, рёбра связывают друзей или врагов. Степени всех вершин по условию равны 2. Если ребро соединяет друзей, изобразим его зелёным цветом; если же ребро соединяет врагов, изобразим его красным цветом. Докажем, что построенный граф является двудольным.

Поскольку степень каждой вершины графа равна 2, любая его связная компонента является циклом. А так как в каждом цикле рассматриваемой цепи рёбра чередуются (красное–зелёное–красное–...–зелёное), то цикл имеет чётную длину. По теореме Кёнига граф является двудольным. Это означает, что в каждой компании (в каждой доле) не будет ни врагов, ни друзей.

Утверждение доказано.

Замечание. Из приведённых рассуждений следует ещё один вывод: *в группе, удовлетворяющей условию задачи, чётное число членов.*

Задача 13

[7] В стране несколько городов, некоторые пары из них соединены авиалиниями, причём для каждого города число городов, с которыми он соединён, не меньше четырёх. Доказать, что возможно путешествие с числом перелётов не менее пяти, которое начинается и заканчивается в одном городе, причём каждый промежуточный город будет посещаться только один раз.

Идея. Если наименьшая степень вершин графа равна n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, то в графе существует простой цикл длины не менее n.

Указания. 1) Построить граф авиаперелётов, рассмотреть в нём простую цепь наибольшей длины.
2) Показать, что для вершин выбранной цепи существует простой цикл длины не менее 5.

Решение. Построим граф авиасообщения страны. Вершины графа соответствуют городам; значения степеней вершин по условию не меньше четырёх. Рёбра графа обозначают авиарейсы между соответствующими городами.

Необходимо доказать, что в таком графе существует простой цикл длины не менее 5.

В построенном графе рассмотрим простую цепь L наибольшей длины. Пронумеруем её вершины: $L = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Заметим, что все рёбра, выходящие из вершины u_1, должны соединять её только с вершинами цепи L, иначе будет существовать цепь длиннее цепи L. Таких рёбер по условию не менее четырёх.

Пусть u_k — вершина цепи L с наибольшим индексом, соединённая ребром с вершиной u_1. Тогда простой цикл $C = (u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1)$ имеет длину не менее 5, так как он включает не менее пяти вершин.

Утверждение доказано.

Замечание. Сформулируем доказанное утверждение в общем виде: *если все вершины графа имеют степень не менее n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, то в таком графе существует простой цикл длины не менее n.*

Задача 14

$\boxed{7}$ На симпозиуме каждый учёный знаком хотя бы с одним из остальных учёных, но не со всеми. Доказать, что всех учёных можно разбить на две группы так, что каждый участник симпозиума будет знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

Идея. Если граф знакомств участников симпозиума является связным, в нём не может быть простых цепей длины 3, 2 или 1.

Указания. 1) Построить граф знакомств участников симпозиума.

2) Рассмотреть несвязный граф без изолированных вершин. Показать, что такой граф удовлетворяет условию.
3) Рассмотреть связный граф. Показать, что наибольшая длина простой цепи в нём не меньше трёх. Предложить алгоритм разбиения вершин графа на две группы по условию.

Решение. Рассмотрим граф знакомств участников симпозиума. Вершины графа соответствуют учёным; две вершины соединены ребром, если соответствующие им учёные знакомы. По условию граф можно разбить на несколько компонент так, что в каждой компоненте будет не менее двух вершин.

1) Если граф не является связным, то решение задачи тривиально. К первой группе отнесём, например, вершины одной компоненты графа, а ко второй группе — все остальные.

2) Рассмотрим связный граф. Предположим, что в нём существует простая цепь, состоящая из трёх или более рёбер и не являющаяся циклом. Разделим эту цепь на две цепи, каждая из которых содержит не менее двух вершин. Отнесём вершины первой цепи к первой группе, а вершины второй цепи — ко второй группе.

Оставшиеся вершины распределим по двум выделенным группам по следующему правилу.

- Отнесём к первой группе все вершины, смежные с вершинами первой цепи и не попавшие во вторую группу.
- Отнесём к первой группе все вершины, смежные с вершинами, смежными с вершинами первой цепи, не попавшие во вторую группу, и так далее.
- Отнесём ко второй группе все вершины, смежные с вершинами второй цепи и не попавшие в первую группу.
- Отнесём ко второй группе все вершины, смежные с вершинами, смежными с вершинами второй цепи, не попавшие в первую группу, и так далее.

Разбиение вершин определит разбиение участников симпозиума на группы.

3) Осталось рассмотреть связный граф, в котором нет простой цепи, состоящей из трёх или более рёбер и не являющейся циклом. В таком графе найдётся вершина, смежная с остальными. Получено противоречие, так как по условию никто из участников не знаком со всеми остальными участниками.

Утверждение доказано.

Задача 15

$\boxed{7}$ Маршруты № 1 и № 2 полицейских патрульных машин начинаются и заканчиваются, соответственно, на перекрёстках A и B (A не совпадает с B). Маршруты различаются, но каждый из них включает отрезок улицы между перекрёстками C и D и не содержит ни одного перекрёстка дважды. Доказать, что можно создать маршрут патрулирования № 3, который не будет включать отрезок (C, D) и не будет содержать ни одного перекрёстка дважды. Всегда ли можно так создать маршрут № 3, чтобы он проходил через перекрёстки C и D?

Идея. Если у двух несовпадающих простых циклов есть некоторое общее ребро, то объединение этих циклов без общего ребра содержит простой цикл.

Указания. 1) Сопоставить каждому маршруту патрульных машин простой цикл на графе города.
2) Исключить из циклов общее ребро CD и перейти к рассмотрению двух различных простых цепей, соединяющих вершины C и D.
3) Показать, что объединение полученных простых цепей содержит простой цикл.

Решение. Представим граф города, в котором перекрёстки являются вершинами, а отрезки улиц между перекрёстками образуют рёбра.

Из условия задачи следует, что маршруты № 1 и № 2 полицейских патрульных машин являются различными простыми циклами, содержащими общее ребро CD. Необходимо доказать, что в графе существует простой цикл (маршрут патрулирования № 3), не содержащий ребра CD.

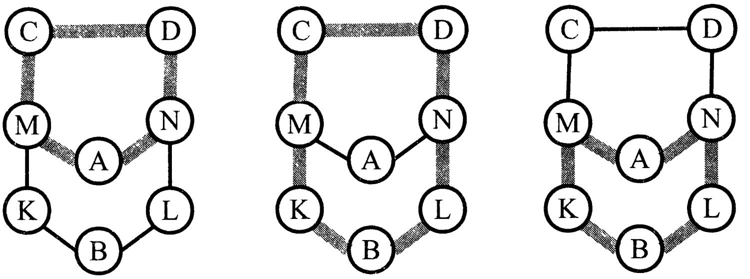
Исключим из маршрутов № 1 и № 2 ребро CD. Получим две несовпадающие простые цепи $(C = u_0, u_1, u_2, \ldots, A, \ldots, u_m = D)$ и $(C = v_0, v_1, v_2, \ldots, B, \ldots, v_n = D)$, соединяющие вершины C и D; $m, n \in \mathbb{N}$. Пусть u_k и v_k — первые несовпадающие вершины данных цепей, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$; u_p и v_t — первая пара совпадающих вершин, следующих за u_k и v_k; $p, t \in \mathbb{N}$, $p > k$, $t > k$.

Рассмотрим части цепей между вершинами $u_{k-1} = v_{k-1}$ и $u_p = v_t$. Их объединение является простым циклом.

Утверждение доказано.

Замечание. Сформулируем доказанное утверждение в общем виде: *если у двух несовпадающих простых циклов есть* *некоторое общее ребро, то объединение этих циклов без общего ребра содержит простой цикл.*

Ответ на второй вопрос задачи проиллюстрирован на рисунке. Маршрут № 3 не всегда проходит через перекрёстки C и D.



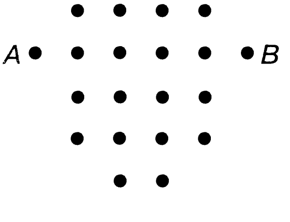
маршрут № 1 маршрут № 2 маршрут № 3

Ответ. Не всегда.

5. Деревья

Задача 1

5 В доску вбито 20 гвоздиков (см. рисунок). Расстояние между соседними гвоздиками равно 1 см. Натяните нитку длиной 19 см от A до B так, чтобы она прошла через все гвоздики.



Идея. Соответствующий задаче граф является цепью с висячими вершинами A и B и рёбрами одинаковой длины, равной 1 см.

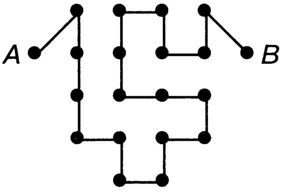
Указания. 1) Рассмотреть граф, в котором вершины соответствуют гвоздикам.

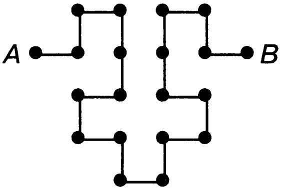
2) Построить простую цепь, соединяющую вершины A и B так, чтобы рёбра являлись сторонами квадратов длины 1 см.

Решение. Будем считать гвоздики вершинами графа. По условию в графе 20 вершин. Необходимо построить цепь, соединяющую вершины A и B, длина которой, выраженная в сантиметрах, была бы равна 19.

На первый взгляд задача тривиальна: занумеруем вершины в произвольном порядке и соединим каждую пару вершин с последовательными номерами ребром. В итоге получим цепь, содержащую 19 рёбер.

Заметим, однако, что такая цепь может иметь длину, большую 19 см (см. рисунок слева). Для построения цепи длины 19 см дополнительно потребуем, чтобы длина каждого ребра была равна 1 см, то есть чтобы каждое ребро соединяло смежные вершины квадрата со стороной в 1 см. Задача имеет несколько решений; одно из решений изображено на рисунке справа.





Замечание. Оба изображённых графа связны и не имеют циклов, то есть являются *деревьями*.

Задача 2

$\boxed{5}$ Сколько было брёвен, если, сделав 52 распила, из них получили 72 полена?

Идея. Каждый распил добавляет одно полено.

Указания. 1) Построить граф, соответствующий распилу одного бревна на 72 полена.
2) Удалить из построенного графа 19 рёбер и найти суммарное количество деревьев.

Решение. Сначала решим задачу, руководствуясь здравым смыслом. Каждый распил из одного бревна делает два, то есть один распил добавляет одно полено. Значит, всего было $72 - 52 = 20$ брёвен. Задача решена!

Второе решение задачи использует теорию графов. Представим граф, вершины которого соответствуют поленьям. Соединим две вершины ребром, если соответствующие поленья были получены в результате распила некоторого бревна и до распила являлись смежными его частями. По условию в графе 72 вершины и 52 ребра.

Данный граф является лесом. Каждое дерево соответствует бревну; длина цепи равна числу распилов данного бревна. Исходя из особенностей процесса распила брёвен, заключаем, что вершины цепей имеют степень, не превосходящую 2, крайние вершины цепей имеют степень, равную 1. В графе могут существовать и изолированные вершины; каждая изолированная вершина соответствует короткому бревну, которое не было подвергнуто обработке. Задача состоит в определении суммарного числа деревьев (включая изолированные вершины) в графе.

Предположим, что бревно было единственным. Распилим бревно на 72 полена. Соответствующий граф является деревом с 72 вершинами и 71 ребром. Для построения леса с 52 рёбрами необходимо удалить $71 - 52 = 19$ рёбер. Удаление одного ребра создаёт одно дополнительное дерево. Значит, после удаления 19 рёбер в графе окажется $1 + 19 = 20$ деревьев. Другими словами, изначально было 20 брёвен.

Ответ. 20 брёвен.

Задача 3

(6-7) В землю вбили 19 колышков. Двое по очереди связывают пары колышков бечёвкой: каждым ходом — одну пару. Выигравшим считается игрок, при ходе которого образовалась замкнутая ломаная, составленная из бечёвок (вершинами ломаной должны быть колышки). Не разрешается связывать два уже ранее соединённых колышка. Кто выиграет при правильной игре?

Идея. Чтобы не проиграть, игроки должны соединять бечёвкой изолированные колышки.

Указания. 1) Построить граф, вершинами которого являются колышки, а рёбрами — натянутая игроками бечёвка.
2) Показать, что для победы необходимо соединять ребром изолированные вершины графа.
3) Проанализировать граф после девятого хода.

Решение. Представим граф, содержащий 19 вершин, соответствующих колышкам. Две вершины соединим ребром, если один из игроков связал соответствующие колышки бечёвкой.

Чтобы не проиграть, игроки должны соединять ребром изолированные вершины. Игра продолжается до тех пор, пока граф остаётся лесом, содержащим деревья с единственным ребром и изолированные вершины. Если один из игроков добавляет ребро к уже существующей цепи длины 1, то следующий игрок сможет построить замкнутую ломаную, содержащую три вершины, и выиграет.

Предположим, что игроки придерживаются описанной выше тактики. В этом случае на десятом ходу, который должен делать второй игрок, в графе уже не останется двух изолированных вершин ($19 = 2 \cdot 9 + 1$), и второй игрок будет вынужден соединить ребром некоторую вершину с уже существующей цепью графа длины 1. На следующем (одиннадцатом) шаге первый игрок построит цикл и выиграет.

Если второй игрок отклонится от описанной тактики, в то время как первый игрок будет её придерживаться, то игра завершится раньше. Победителем также станет первый игрок.

Итак, при правильной игре первого игрока независимо от игры второго игрока первый непременно выиграет.

Ответ. Первый игрок.

Задача 4

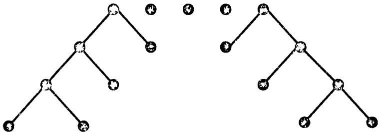
$\boxed{5}$ Гриша пошёл с папой в тир. Уговор был такой. Гриша делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право сделать ещё два выстрела. Гриша выстрелил 17 раз. Сколько раз он попал в цель?

Идея. Каждый успешный выстрел добавляет в граф две вершины.

Указания. 1) Построить граф стрельбы Гриши в тире. Вершины соответствуют выстрелам, рёбра соединяют успешный выстрел с двумя дополнительными.
2) Ввести переменную, равную числу успешных выстрелов. Составить уравнение для общего числа выстрелов.

Решение. Представим граф, вершины которого соответствуют выстрелам Гриши. По условию в графе 17 вершин. Соединим две вершины ребром, если выстрел, соответствующий первой вершине, был успешным и за ним последовал выстрел, соответствующий второй вершине.

Построенный граф является лесом. В каждом дереве, содержащем не менее двух вершин, степени всех вершин, кроме висячих, равны 2 или 3. В графе могут быть и изолированные вершины; их не более четырёх. Изолированным вершинам соответствуют неудачные выстрелы среди первых пяти. Пример графа стрельбы Гриши в тире, содержащего пять деревьев, среди которых три изолированные вершины, приведён на рисунке.



Обозначим через n число успешных выстрелов Гриши; $n \in \mathbb{N}$. Составим уравнение для числа вершин графа. Пять выстрелов были сделаны на первом этапе (это 5 вершин); затем каждый успешный выстрел позволил Грише сделать ещё два выстрела (это $2n$ вершин):

$$5 + 2n = 17 \iff 2n = 12 \iff n = 6.$$

Гриша попал в цель 6 раз.

Ответ. 6 раз.

Задача 5

[6-7] Всё началось с одной курицы, которая снесла два яйца. Из них вывелись цыплята: петух и курица. Когда они подросли, петуха съели, а курицу съели только после того, как она снесла два яйца. Так делали и дальше: из яиц выводили цыплят и так далее. Всё прекратилось, когда из яиц вылупились одни только петухи. Всего было съедено 1994 петуха. Сколько было кур?

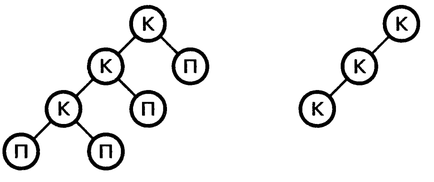
Идея. Количество кур равно числу вершин графа, описывающего поголовье птицы, которые не являются висячими.

Указания. 1) Построить граф, вершинами которого являются куры и петухи. Соединить ребром две вершины, если одна вершина соответствует курице, а вторая — её цыплёнку.
2) Ввести переменную, равную числу кур. Составить уравнение для числа рёбер графа, идущих к висячим вершинам.

Решение. Построим граф пополнения и уничтожения поголовья птицы. Вершинам графа поставим в соответствие птиц. Две вершины соединим ребром только в том случае, если первая вершина соответствует курице, а вторая — одному из двух цыплят, которые вылупились из снесённых этой курицей яиц. В таком графе вершины, соответствующие курам, имеют степень, равную 3, кроме вершины, отвечающей первой курице и имеющей степень 2; вершины, соответствующие петухам, являются висячими.

Построенный граф является деревом. По условию он содержит 1994 висячие вершины. Необходимо определить, сколько вершин графа не являются висячими.

Введём переменную k — количество кур; $k \in \mathbb{N}$. Соответствующие курам вершины образуют подграф (дерево) с $k-1$ рёбрами. Пример графа для всего поголовья и подграфа для кур при $k=3$ изображён на рисунке.



Остальные рёбра графа, не принадлежащие подграфу, ведут к висячим вершинам, соответствующим петухам. Составим уравнение для числа таких рёбер:

$$2k-(k-1)=1994 \iff k=1993.$$

Всего было 1993 курицы.

О т в е т. 1993 курицы.

Задача 6

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Имеется лист бумаги. Его можно разорвать на 5 частей. Каждый новый кусок можно разорвать на 5 частей или оставить целым и так далее. Можно ли получить таким образом 50 кусков?

б) Если всякий лист можно рвать на 8 или 12 частей, выясните, можно ли из одного листа получить 60 кусков. Доказать, что любое число кусков, большее 60, получить можно.

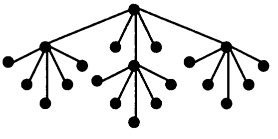
И д е я. Число кусков бумаги равно числу висячих вершин графа, соответствующего описанному процессу.

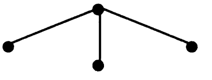
У к а з а н и я. 1) Построить граф, вершинами которого являются куски бумаги. Соединить ребром две вершины, если один из соответствующих им кусков бумаги получен из второго.

2) Ввести переменную, равную числу кусков, разделённых на части. Составить уравнение для числа рёбер графа, идущих к висячим вершинам.

Решение. а) Построим граф описанного процесса. Вершинам графа поставим в соответствие куски бумаги. Соединим две вершины ребром, если из большего куска, соответствующего первой вершине, при разрыве получился меньший кусок, соответствующий второй вершине.

Построенный граф является деревом. Из условия задачи следует, что степень первой вершины равна 5, а степени остальных вершин, кроме висячих, равны 6. Пример графа, обладающего этим свойством, изображён на рисунке слева.





Необходимо определить, может ли число висячих вершин такого графа быть равным 50.

Введём переменную k — число кусков бумаги, которые были разорваны на пять частей; $k \in \mathbb{N}$. Соответствующие этим кускам вершины образуют подграф (дерево) с $k - 1$ ребром (рисунок справа). Остальные рёбра графа, не принадлежащие подграфу, ведут к висячим вершинам. Составим уравнение для числа таких рёбер:

$$5k - (k - 1) = 50 \iff 4k = 49.$$

Полученное уравнение не имеет решений на множестве натуральных чисел. Значит, нельзя получить 50 кусков способом, описанным в пункте а) условия.

б) По аналогии с пунктом а) составим уравнение для 60 кусков. Пусть m — число кусков, которые были разделены на 8 частей, n — число кусков, которые были разделены на 12 частей; $m, n \in \mathbb{N}_0$.

$$8m + 12n - (m + n - 1) = 60 \iff 7m + 11n = 59.$$

Перебирая возможные значения переменной n из множества $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, получаем дробные значения переменной m. Значит, нельзя получить 60 кусков, если рвать некоторые листы на 8 или на 12 частей.

В заключение докажем, что любое число кусков, большее 60, получить можно. Пусть число кусков равно M; $M > 60$. Составим уравнение для числа висячих вершин графа:

$$8m + 12n - (m + n - 1) = M \iff 7m + 11n = M - 1; \quad M \geqslant 61.$$

Пусть $K = M - 1$; $K \in \mathbb{N}$; $K \geqslant 60$. Рассмотрим различные остатки при делении числа K на 7.

- $K \equiv 0 \pmod 7$; в этом случае число K делится на 7; $n = 0$, $m = \frac{K}{7}$.
- $K \equiv 1 \pmod 7$; в этом случае число $7 \cdot 3 + 1 = 22$ делится на 11; $n = 2$, $m = \frac{K - 22}{7}$.
- $K \equiv 2 \pmod 7$; число $7 \cdot 6 + 2 = 44$ делится на 11; $n = 4$, $m = \frac{K - 44}{7}$.
- $K \equiv 3 \pmod 7$; число $7 \cdot 9 + 3 = 66$ делится на 11; $n = 6$, $m = \frac{K - 66}{7}$.
- $K \equiv 4 \pmod 7$; число $7 \cdot 1 + 4 = 11$ делится на 11; $n = 1$, $m = \frac{K - 11}{7}$.
- $K \equiv 5 \pmod 7$; число $7 \cdot 4 + 5 = 33$ делится на 11; $n = 3$, $m = \frac{K - 33}{7}$.
- $K \equiv 6 \pmod 7$; число $7 \cdot 7 + 6 = 55$ делится на 11; $n = 5$, $m = \frac{K - 55}{7}$.

Мы показали, что для любого $K \geqslant 60$ найдутся натуральные числа m и n такие, что $7m + 11n = K$.

Утверждение доказано.

Ответ. а) Нет; б) нет.

Задача 7

$\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли расставить числа $1, 2, \ldots, 9$ по кругу так, чтобы никакая сумма двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

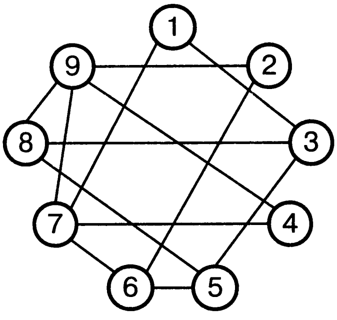
Идея. Привести пример.

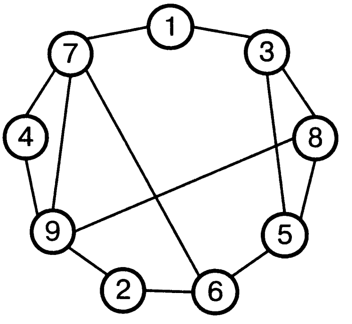
Указания. 1) Построить граф, содержащий 9 вершин. Соединить две вершины ребром, если сумма их номеров не делится на 3, 5 и 7.

2) Найти в построенном графе простые цепи длины 2, содержащие вершину степени 2.

3) Объединить найденные простые цепи в простой цикл, используя метод перебора для определения положения оставшихся вершин.

Решение. Построим граф, соответствующий условию задачи. Перенумеруем вершины графа от 1 до 9. Соединим две вершины ребром, если сумма номеров этих вершин не кратна трём, пяти и семи (рисунок слева).





Переформулируем задачу так: существует ли в этом графе простой цикл, содержащий все 9 вершин?

Замечание. *Простой цикл* — цикл, в котором все вершины различны.

Заметим, что если такой цикл существует, то он должен включать цепи 7–1–3, 9–2–6, 7–4–9, поскольку степени вершин 1, 2 и 4 равны двум. Значит, в цикле должна быть простая цепь 7–4–9–2–6. Расположение остальных вершин в цикле можно определить, перебирая возможные варианты (рисунок справа):

$$1-3-8-5-6-2-9-4-7-1.$$

Ответ. Можно; 1385629471.

Замечание. Поскольку в графе есть простой цикл, в который входят все вершины, граф по определению является *гамильтоновым*.

Задача 8

6-7 В графе все вершины имеют степень 3. Доказать, что в нём есть цикл.

Идея. Любая компонента связности графа не является деревом.

Указание. Рассмотреть компоненты связности графа. Показать, что они не являются деревьями.

Решение. По условию степень любой вершины графа равна трём. Значит, в графе нет висячих вершин, степень которых равна единице. Согласно *лемме о висячей вершине* (пример 2) в графе нет ни одного дерева.

Итак, любая компонента связности графа содержит не менее 3 вершин и не является деревом. Значит, в ней есть цикл. Утверждение доказано.

Задача 9

6-7 Доказать, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

Идея. Воспользоваться методом доказательства от противного.

Указания. 1) Предположить, что после удаления одного ребра дерева оно останется связным графом.
2) Показать, что при сделанном предположении в исходном дереве должен существовать цикл.
3) Заметить, что существование цикла противоречит определению дерева.

Решение. Воспользуемся методом доказательства от противного. Предположим, что после удаления некоторого ребра, соединяющего вершины u и v дерева, оно остаётся связным графом, то есть найдётся путь, соединяющий эти вершины. Тогда объединение этого пути с удалённым ребром образует в исходном графе цикл.

Этот результат противоречит определению дерева. Значит, предположение было неверным и удаление любого ребра из дерева превращает его в несвязный граф.

Утверждение доказано.

Задача 10

6-7 В стране Древляндия n городов, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

Идея. В дереве число рёбер на единицу меньше числа вершин.

Указания. 1) Построить граф дорог Древляндии.
2) Доказать, что граф дорог является деревом.
3) Для оценки числа рёбер графа воспользоваться примером 3.

Решение. Представим граф дорог Древляндии. Вершины графа соответствуют городам; две вершины соединены ребром, если соответствующие им города соединены дорогой.

По условию любые две вершины соединяет ровно один путь. Значит, построенный граф является деревом (см. пример 1).

В примере 3 показано, что в любом дереве число вершин на единицу больше числа рёбер. Значит, в графе $n-1$ рёбер, то есть в стране Древляндия $n-1$ дорог.

Ответ. $n-1$ дорог.

Задача 11

$\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является деревом.

Идея. Использовать метод доказательства от противного.

Указания. 1) Предположить, что граф содержит цикл. Удалить одно ребро цикла. Показать, что граф останется связным.
2) Продолжить удаление рёбер циклов до тех пор, пока исходный граф не станет деревом.
3) Составить уравнение для вершин и рёбер дерева; получить противоречие.

Решение. Докажем утверждение от противного. Рассмотрим связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин. Обозначим число вершин графа через n, тогда число рёбер в нём равно $n-1$. Предположим, что этот граф не является деревом. Значит, в нём существует как минимум один цикл.

Заметим, что удаление любого ребра из цикла оставляет граф связным. Найдём в графе цикл и удалим из него одно ребро. Если полученный граф содержит цикл, удалим из этого цикла ещё одно ребро. Продолжим удалять рёбра из циклов, пока не получим дерево, то есть связный граф без циклов.

Обозначим число удалённых рёбер через k, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку в дереве число вершин на единицу больше числа рёбер (см. пример 3), введённые переменные связаны следующим соотношением:

$$n-1=n-1-k \iff k=0.$$

Полученное равенство означает, что связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, не может содержать циклов, то есть является деревом.

Утверждение доказано.

Задача 12

6-7 а) Волейбольная сетка — прямоугольник 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать, чтобы сетка не распалась?

Идея. Связный граф с наименьшим числом рёбер является деревом.

Указания. 1) Построить граф, соответствующий волейбольной сетке.
2) Удалить рёбра графа так, чтобы получилось дерево.
3) Определить число рёбер дерева, используя пример 3.

Решение. Представим волейбольную сетку в виде графа, вершины которого соответствуют узлам сетки, а рёбра — соединяющим узлы верёвочкам. Число вершин графа равно $51 \cdot 601 = 30\,651$, число рёбер есть сумма вертикальных и горизонтальных верёвочек:

$$50 \cdot 601 + 51 \cdot 600 = 30\,050 + 30\,600 = 60\,650.$$

Сетка не распадётся, если после удаления рёбер граф останется связным. Связный граф с наименьшим числом рёбер является деревом. При удалении хотя бы одного ребра дерева граф становится несвязным. Значит, удаляя рёбра из построенного графа, нужно получить дерево.

В дереве число рёбер на единицу меньше числа вершин (см. пример 3). В дереве, содержащем $30\,651$ вершину, будет $30\,650$ рёбер. Покажем, что из графа, соответствующего волейбольной сетке, такое дерево получить можно. Удалим все вертикальные рёбра, за исключением крайних левых. Получим дерево, содержащее 50 вертикальных рёбер и $50 \cdot 601 = 30\,600$ горизонтальных рёбер; $50 + 30\,600 = 30\,650$. Нужное дерево построено, для этого пришлось удалить $50 \cdot 600 = 30\,000$ рёбер.

Ответ. 30 000 рёбер.

Задача 13

6-7 Доказать, что в любом связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным.

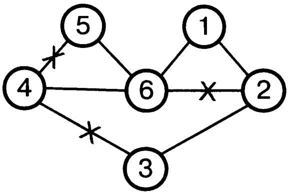
Идея. Выделить в графе максимальное дерево и удалить висячую вершину.

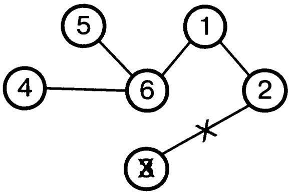
Указания. 1) Если граф содержит висячую вершину, удалить её вместе с выходящим из неё ребром.
2) Если граф не содержит висячую вершину, выделить в нём дерево и удалить висячую вершину.

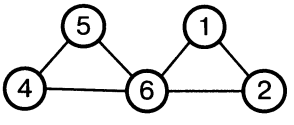
Решение. Рассмотрим два случая.

1) Связный граф содержит висячую вершину. Удалим висячую вершину вместе с выходящим из неё ребром; граф останется связным.

2) Связный граф не содержит висячей вершины. Значит, он не может быть деревом. Связный граф, не являющийся деревом, содержит хотя бы один цикл. Из такого графа можно сделать дерево. Для этого будем последовательно удалять по одному ребру из циклов (пример приведён на рисунке вверху слева). Каждое удаление ребра из цикла оставляет граф связным.







В полученном дереве должны быть висячие вершины. Выберем одну из них и удалим её вместе с выходящим из неё ребром; граф останется связным (рисунок вверху справа).

На последнем шаге восстановим рёбра графа, которые принадлежали циклам, за исключением рёбер, выходящих из удалённой вершины (рисунок внизу). Получаем связный граф, удовлетворяющий условию задачи.

Утверждение доказано.

Задача 14

6-7 По дорожкам парка «Лотос» можно зайти в любой его уголок, но нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую часть дорожки между двумя перекрёстками парка содержит не более одного раза. Доказать, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

Идея. В каждом дереве есть висячая вершина.

Указания. 1) Построить граф дорог парка.
2) Показать, что граф является деревом.

Решение. Построим граф дорог парка «Лотос». Вершинам графа поставим в соответствие перекрёстки дорог и тупики. Две вершины соединим ребром, если соответствующие вершинам перекрёстки и тупики соединены дорожкой. По условию граф не содержит циклов. Необходимо доказать, что у графа есть висячие вершины.

Поскольку граф связный и не содержит циклов, он является деревом. В каждом дереве есть висячая вершина (пример 2). Утверждение доказано.

Задача 15

$\boxed{6\text{-}7}$ Администрация парка «Лотос» (см. предыдущую задачу) решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекрёсток и каждый тупик должны будут освещаться четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрёстка или перекрёсток и тупик, — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрёстков и тупиков?

Идея. В дереве число вершин на единицу больше числа рёбер.

Указания. 1) Найти число вершин и рёбер в графе дорог парка «Лотос».
2) Воспользоваться условием: у каждой вершины будет размещено 4 светильника, вдоль каждого ребра — 6 светильников.

Решение. Граф дорог парка «Лотос» является деревом (см. предыдущую задачу). По условию в графе 18 вершин и $18 - 1 = 17$ рёбер (пример 3).

Поскольку у каждой вершины по новому проекту будет размещено четыре светильника, а вдоль каждого ребра — шесть светильников, всего в парке будет установлено

$$18 \cdot 4 + 17 \cdot 6 = 72 + 102 = 174$$

светильника.

Ответ. 174 светильника.

Задача 16

(6-7) Доказать, что между любыми двумя перекрёстками или тупиками парка «Лотос» (см. предыдущие задачи) существует единственный маршрут для прогулок, в котором нет повторяющихся дорожек.

Идея. В дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.

Указания. 1) Граф дорог парка «Лотос» является деревом.
2) Воспользоваться свойством дерева, доказанным в замечании к примеру 1: в дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.

Решение. Граф дорог парка «Лотос» является деревом (см. предыдущие задачи). В дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью (пример 1, замечание). Значит, между любыми двумя перекрёстками или тупиками парка «Лотос» существует единственный маршрут для прогулок, в котором нет повторяющихся дорожек. Утверждение доказано.

Задача 17

(6-7) В парке «Лотос-2» число перекрёстков и тупиков на единицу больше, чем число отрезков дорожек между перекрёстками и тупиками. Кроме того, по дорожкам парка можно зайти в любой его уголок. Доказать, что в парке нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более одного раза.

Идея. В дереве нет циклов.

Указания. 1) Построить граф дорог парка «Лотос-2». Доказать, что он является деревом.
2) Воспользоваться определением дерева.

Решение. Представим граф дорог парка «Лотос-2». Вершинам графа поставим в соответствие перекрёстки дорог и тупики. Рёбра графа — дорожки, которые соединяют соответствующие вершинам перекрёстки и тупики. Необходимо доказать, что у графа нет циклов.

По условию граф является связным, а число вершин в нём на единицу больше числа рёбер. Такой граф является деревом; это было показано в задаче 11. Значит, согласно определению дерева, в графе нет циклов. Утверждение доказано.

Задача 18

[6-7] В парке «Лотос-3» число перекрёстков и тупиков на единицу больше, чем число отрезков дорожек между перекрёстками и тупиками. Кроме того, в парке нельзя найти такой маршрут для прогулок, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую часть дорожки между двумя перекрёстками парка содержит не более одного раза. Доказать, что в парке любые два перекрёстка или тупика соединены единственным маршрутом для прогулки.

Идея. В дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.

Указания. 1) Граф дорог парка «Лотос-3» является деревом. 2) Воспользоваться свойством дерева, доказанным в замечании к примеру 1: в дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.

Решение. Построим граф дорог парка «Лотос-3». Вершинам графа поставим в соответствие перекрёстки дорог и тупики. Рёбра графа соответствуют дорожкам, которые соединяют соответствующие вершинам перекрёстки и тупики. По условию граф связный и не содержит циклов. Необходимо доказать, что любые две вершины графа соединены ровно одной простой цепью.

Связный граф без циклов по определению является деревом. В дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью (пример 1, замечание). Значит, в парке «Лотос-3» любые два перекрёстка или тупика соединены единственным маршрутом для прогулки. Утверждение доказано.

6. Плоские графы

Задача 1

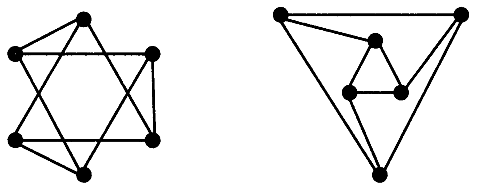
[6-7] В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

Идея. План города можно представить в виде плоского графа с шестью вершинами степени 3.

Указания. 1) Нарисовать некоторый граф с шестью вершинами степени 3.
2) Передвигая вершины, получить плоский граф, рёбра которого являются отрезками.

Решение. По условию план Совершенного города можно представить в виде плоского графа с рёбрами, являющимися отрезками. Вершинами графа являются площади; каждая вершина имеет степень, равную 3.

Сначала изобразим произвольный граф с шестью вершинами степени 3 (рисунок слева). Затем, передвигая вершины, получим плоский граф с рёбрами, являющимися отрезками (рисунок справа).



Замечание. Согласно теореме Вагнера—Фари—Штайна простой плоский граф всегда можно изобразить так, чтобы все его рёбра были отрезками.

Задача 2

6-7 В стране 7 озёр, соединённых между собой 11 непересекающимися каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озёрами и каналами?

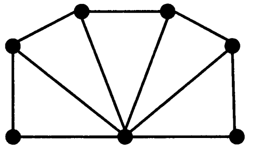
Идея. Число граней плоского графа на единицу больше числа островов.

Указания. 1) Построить граф озёр и каналов. Доказать, что граф связный и плоский.
2) Воспользоваться формулой Эйлера.

Решение. Рассмотрим граф системы озёр и каналов страны. Вершины графа обозначают озёра; две вершины соединены ребром, если соответствующие им озёра соединены каналом; число вершин $n = 7$, число рёбер $m = 11$. По условию каналы не пересекаются и от любого озера можно доплыть до любого другого. Значит, граф является плоским, связным и для него справедлива формула Эйлера $n - m + f = 2$, где f — число граней.

$$7 - 11 + f = 2 \iff f = 6.$$

Внешняя грань островом не является, поэтому в стране есть $6 - 1 = 5$ островов, образованных озёрами и каналами. Пример графа, удовлетворяющего условию задачи, изображён на рисунке.



Ответ. 5 островов.

Задача 3

(6-7) Разумные муравьи с планеты Тямти-Лямти живут в колониях. Колонии состоят из ячеек, которые муравьи строят из палочек. В одной ячейке живёт один муравей. Каждая ячейка представляет собой многоугольник. Палочки соединяются между собой с помощью специального раствора, причём можно соединять только концы палочек. Известно, что для создания колонии муравьи использовали 58 палочек, которые скрепили в 30 местах. Сколько муравьёв живёт в колонии?

Идея. Число граней плоского графа колонии муравьёв на единицу больше числа муравьёв.

Указания. 1) Построить граф муравьиной колонии. Доказать, что граф связный и плоский.
2) Воспользоваться формулой Эйлера.

Решение. Представим граф колонии муравьёв планеты Тямти-Лямти. Он содержит $m = 58$ рёбер, которые соответствуют палочкам, и $n = 30$ узлов, соответствующих местам соединения концов палочек. Граф является плоским, связным, все грани графа, за исключением внешней, соответствуют ячейкам. Для определения числа граней f воспользуемся формулой Эйлера $n - m + f = 2$:

$$30 - 58 + f = 2 \iff f = 30.$$

Значит, в колонии $30 - 1 = 29$ муравьёв.

Ответ. 29 муравьёв.

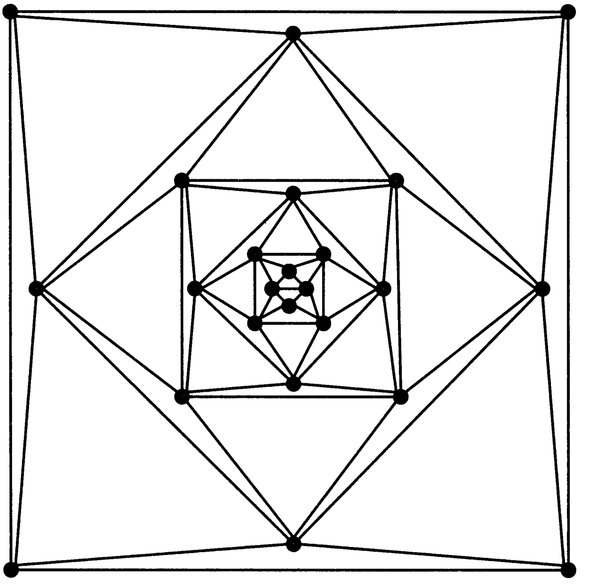
Задача 4

[6-7] Внутри квадрата отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Идея. Число граней графа разбиения квадрата на треугольники на единицу больше числа треугольников.

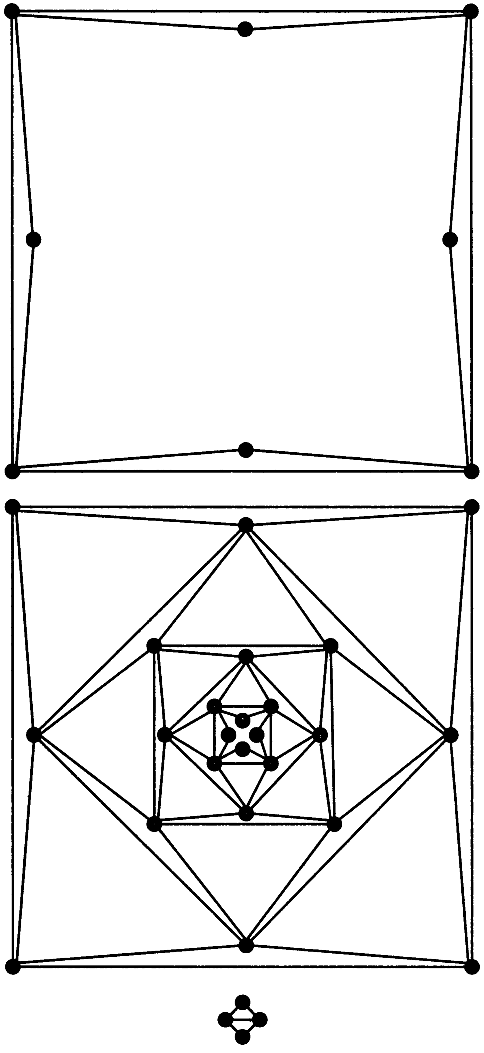
Указания. 1) Построить граф, соответствующий условию. Доказать, что граф связный и плоский.
2) По формуле Эйлера найти число граней. Число треугольников на единицу меньше числа граней.

Решение. Сделаем чертёж. Разобьём внутреннюю область квадрата на треугольники (то есть проведём триангуляцию).



Получим связный плоский граф с $n = 24$ вершинами и $m = 5 \cdot 12 + 5 = 65$ рёбрами. При определении значения m сначала найдём число рёбер подграфа, изображённого на следующем рисунке вверху; их 12. Затем заметим, что в графе есть ещё

4 похожих (*изоморфных* рассмотренному) подграфа с 12 рёбрами (рисунок в центре). Наконец, добавим в сумму 5 рёбер из центральной части графа (рисунок внизу).



По формуле Эйлера $n - m + f = 2$ найдём число граней f:

$$24 - 65 + f = 2 \iff f = 43.$$

Исключаем внешнюю грань и получаем ответ: $43 - 1 = 42$ треугольника.

Ответ. 42 треугольника.

Задача 5

$\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что для плоского графа верно неравенство $2m \geqslant 3f$.

Идея. Используя определения, получить оценку для числа рёбер, ограничивающих грани плоского графа.

Указания. 1) Получить оценку числа рёбер, ограничивающих одну грань.
2) В оценке для всего графа учесть, что каждое ребро разделяет две грани.

Решение. Каждая грань плоского графа (не обязательно связного) ограничена не менее чем тремя рёбрами. Каждое ребро разделяет две грани. Значит, для числа рёбер m и числа граней f плоского графа справедливо неравенство

$$m \geqslant \frac{3}{2}f \iff 2m \geqslant 3f.$$

Утверждение доказано.

Задача 6

$\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что для плоского связного графа, содержащего не менее трёх вершин, справедливо неравенство $m \leqslant 3n - 6$.

Идея. Использовать теорему Эйлера.

Указания. 1) Из формулы Эйлера выразить число граней.
2) Воспользоваться оценкой, связывающей число рёбер и число граней плоского графа.

Решение. Согласно теореме Эйлера число вершин n, число рёбер m и число граней f плоского связного графа связны следующим соотношением:

$$n - m + f = 2.$$

В предыдущей задаче было показано, что для любого плоского графа, в том числе связного,

$$2m \geqslant 3f.$$

Воспользуемся этой оценкой в формуле Эйлера:

$$f = m - n + 2 \iff 3f = 3m - 3n + 6 \implies$$

$$\implies 3m - 3n + 6 \leqslant 2m \iff m \leqslant 3n - 6.$$

Утверждение доказано.

> ***Замечание.*** Доказанное неравенство является следствием теоремы Эйлера. Оно позволяет находить неплоские связные графы.

Задача 7

$\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что для плоского графа (в том числе и несвязного), содержащего не менее трёх вершин, справедливо неравенство $m \leqslant 3n - 6$.

Идея. Из любого несвязного графа, добавляя рёбра, можно получить связный граф.

Указания. 1) Достроить граф до связного.
2) Воспользоваться результатом предыдущей задачи и неравенством, связывающим число рёбер и число вершин плоского связного графа.

Решение. Для плоского связного графа утверждение доказано в задаче 6. Если плоский граф не является связным, то его можно достроить до плоского связного графа, добавив несколько рёбер.

Пусть плоский несвязный граф содержит n вершин и m рёбер, а полученный из него плоский связный граф содержит m_1 рёбер, где $m_1 > m$. Применим к связному графу следствие из теоремы Эйлера, доказанное в предыдущей задаче:

$$m < m_1 \leqslant 3n - 6.$$

Утверждение доказано.

> ***Замечание.*** Доказанное неравенство является необходимым условием планарности графа. Оно позволяет находить неплоские графы, в том числе несвязные.

Задача 8

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Доказать, что полный граф с пятью вершинами не является плоским.

Идея. Воспользоваться следствием из теоремы Эйлера (см. предыдущую задачу).

Указания. 1) Найти число рёбер графа.
2) Проверить выполнение неравенства, связывающего число рёбер с числом вершин плоского графа.

Решение. В полном графе с пятью вершинами $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ рёбер. Необходимо определить, может ли граф с пятью вершинами и десятью рёбрами быть плоским.

В предыдущей задаче было доказано, что для плоского графа, содержащего не менее трёх вершин, справедливо неравенство $m \leqslant 3n - 6$, где m — число рёбер, n — число вершин графа. Для полного графа с пятью вершинами

$$3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10.$$

Не выполнено необходимое условие планарности графа. Значит, полный граф с пятью вершинами не является плоским.

Утверждение доказано.

Задача 9

$\boxed{6\text{-}7}$ Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнёзда которой устанавливают электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, используют напылённые металлические дорожки. Поскольку проводники не изолируются, дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то одну из дорожек переносят на другую сторону платы. Инженер Иванов придумал хорошую схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, чтобы все проводники были расположены на одной её стороне?

Идея. Воспользоваться следствием из теоремы Эйлера (необходимым условием планарности графа).

Указание. Проверить справедливость неравенства, связывающего число рёбер с числом вершин плоского графа.

Решение. Представим печатную плату в виде графа, вершинами которого являются электронные приборы, а рёбрами — соединяющие их металлические дорожки. Вопрос можно переформулировать так: существует ли плоский граф, содержащий 12 вершин и 32 ребра?

Проверим выполнение необходимого условия планарности графа:

$$m \leqslant 3n - 6,$$

где m — число рёбер, n — число вершин графа. Для графа, соответствующего печатной плате инженера Иванова,

$$32 > 3 \cdot 12 - 6 = 30.$$

Значит, граф не может быть плоским; изготовить одностороннюю плату невозможно.

Ответ. Нет.

Задача 10

$\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

Идея. Использовать метод доказательства от противного.

Указания. 1) Показать, что плоский граф, содержащий не более 5 вершин, удовлетворяет условию.
2) Рассмотреть плоский граф, содержащий более 5 вершин. Предположить, что в нём степени всех вершин превосходят 5.
3) Оценить удвоенное число рёбер графа, используя информацию о степенях вершин.
4) Оценить число рёбер графа, используя теорему Эйлера; получить противоречие.

Решение. Заметим, что если плоский граф содержит не более пяти вершин, то он удовлетворяет условию, поскольку степени вершин такого графа не превосходят 5.

Далее будем рассматривать графы, содержащие более 5 вершин. Докажем утверждение методом от противного. Предположим, что существует плоский граф, содержащий не менее 6 вершин, степени которых больше 5. Удвоенное число рёбер любого графа есть сумма степеней всех вершин. В нашем случае

$$2m \geqslant 6n \iff m \geqslant 3n,$$

где m — число рёбер, n — число вершин графа. С другой стороны, для плоского графа, содержащего не менее трёх вершин, справедливо неравенство

$$m \leqslant 3n - 6$$

(следствие из теоремы Эйлера, необходимое условие планарности графа). Получено противоречие, так как $3n-6 < 3n$. Значит, предположение было неверным и в плоском графе обязательно найдётся вершина, степень которой не превосходит 5.

Утверждение доказано.

Задача 11

$\boxed{6\text{-}7}$ Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Доказать, что по крайней мере один из графов — «красный» или «синий» — не является плоским.

Идея. Использовать метод доказательства от противного.

Указания. 1) Предположить, что оба графа, «красный» и «синий», плоские.
2) Воспользоваться оценкой для числа рёбер планарного графа (необходимое условие планарности).
3) Найти число рёбер полного графа с 11 вершинами; получить противоречие.

Решение. Предположим, что оба графа, «красный» и «синий», являются плоскими графами с 11 вершинами. Согласно необходимому условию планарности графов для числа рёбер «красного» и «синего» графов $m_{\text{к}}$ и $m_{\text{с}}$ справедливы оценки

$$m_{\text{к}} \leqslant 3 \cdot 11 - 6, \quad m_{\text{с}} \leqslant 3 \cdot 11 - 6.$$

Значит, для суммарного числа рёбер двух графов должна быть справедлива оценка

$$m_{\text{к}} + m_{\text{с}} \leqslant 27 + 27 = 54.$$

Заметим, что сумма $m_{\text{к}} + m_{\text{с}}$ должна быть равна общему числу рёбер полного графа m. В полном графе с 11 вершинами

$$m = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

рёбер. Получили противоречие, которое доказывает, что «красный» и «синий» графы не могут быть плоскими одновременно. Утверждение доказано.

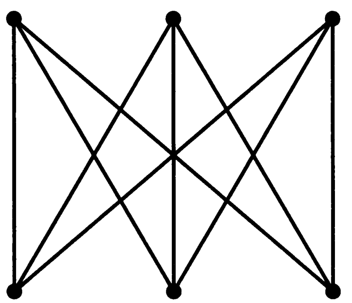
Задача 12

$\boxed{6\text{-}7}$ Имеются три дома и три колодца. Каждый хозяин пользуется любым из трёх колодцев. В некоторый момент обитатели домов поссорились и решили проложить свои дорожки до колодцев так, чтобы дорожки не пересекались. Возможно ли это?

Идея. Сделав предположение о планарности графа, получить противоречивые оценки для числа граней.

Указания. 1) Построить полный двудольный граф.
2) Проверить выполнение необходимого условия планарности.
3) Предположить, что граф плоский, и найти число граней, используя теорему Эйлера.
4) Оценить число граней, используя двудольность графа; получить противоречие.

Решение. Построим граф водоснабжения в поселении, состоящем из трёх домов. Граф является полным двудольным, доли соответствуют домам и колодцам и содержат по 3 вершины. Все вершины имеют степень, равную 3. Необходимо определить, является ли такой граф плоским.



Прежде всего найдём число рёбер: $m = 3 \cdot 3 = 9$. Проверим, выполняется ли неравенство $m \leqslant 3n - 6$, связывающее число рёбер m и число вершин n плоского графа, содержащего не менее трёх вершин (необходимое условие планарности графа). Для графа с шестью вершинами степени 3 неравенство выполнено:

$$9 < 3 \cdot 6 - 6 = 12.$$

Значит, граф с шестью вершинами степени 3 *может быть* плоским. Докажем, что, несмотря на выполнение необходимого условия, граф плоским не является.

Предположим, что граф является плоским. Из теоремы Эйлера следует, что плоский граф с шестью вершинами степени 3 должен иметь

$$f = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5$$

граней. С другой стороны, построенный граф двудольный, поэтому каждая грань должна быть ограничена по меньшей мере

4 рёбрами. Следовательно, число граней не может превосходить значения $\frac{9}{4} \cdot 2 = 4{,}5$.

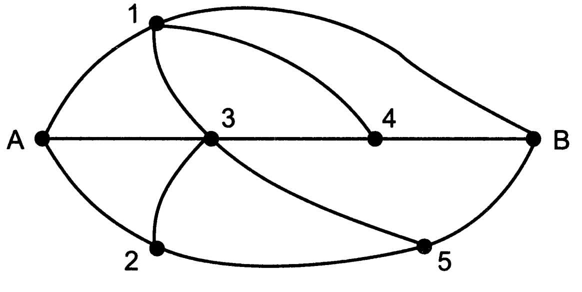
Получено противоречие. Значит, предположение было неверным и полный двудольный граф с шестью вершинами степени 3 не является плоским.

Ответ. Нет.

7. Ориентированные графы

Задача 1

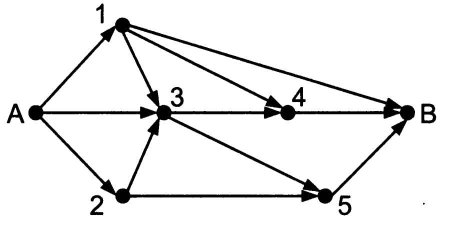
6-7 Из города A в город B ведут несколько дорог (карту дорог см. на рисунке). Найдите число маршрутов автомобильного путешествия из A в B, учитывая, что при движении автомобиль должен всё время приближаться к B.



Идея. Карта дорог, ведущих из города A в город B, может быть представлена в виде ориентированного графа.

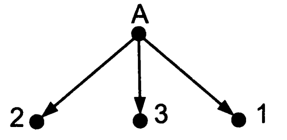
Указания. 1) Построить ориентированный граф дорог, соединяющих города A и B.
2) Найти число различных путей, соединяющих вершины A и B.

Решение. Построим граф дорог, соединяющих города A и B. Вершины графа соответствуют пунктам A и B и перекрёсткам 1, 2, 3, 4, 5; рёбра соответствуют дорогам. Поскольку по условию автомобиль должен приближаться к пункту *B*, рёбра будут ориентированными.

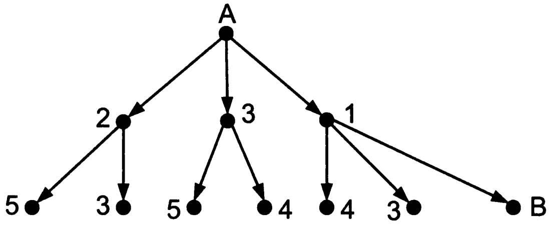


Необходимо найти число различных путей, соединяющих вершины *A* и *B*. Воспользуемся методом перебора и проиллюстрируем рассуждения рисунками.

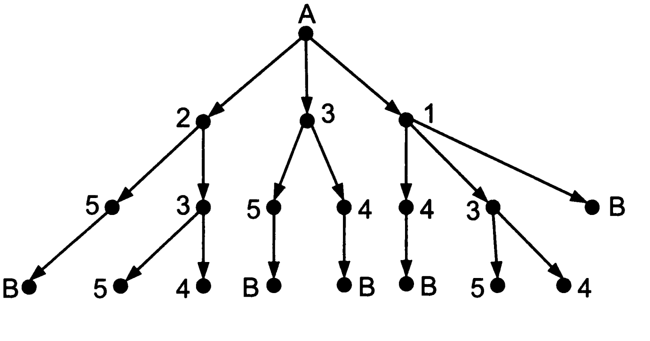
Из вершины *A* ведут три ребра.



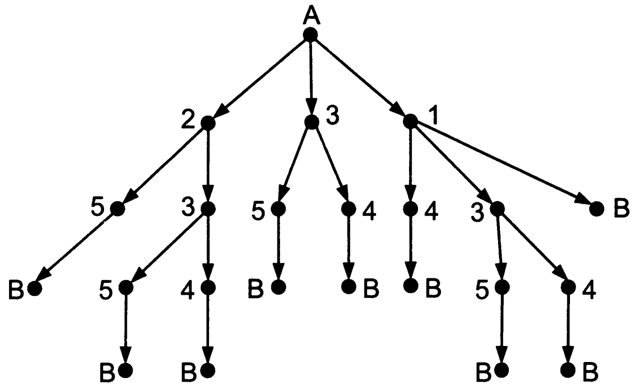
Из вершины 1 выходят три ребра, а из вершин 2 и 3 — по два ребра.



Из вершины 3 выходят два ребра, а из вершин 4 и 5 — по одному ребру.



Из вершин 4 и 5 можно добраться до вершины *B* единственным способом.



Итак, автомобильное путешествие из города *A* в город *B* можно совершить по одному из девяти маршрутов.

Ответ. 9 маршрутов.

Задача 2

6-7 В стране 101 город. Города соединены дорогами с односторонним движением так, что два города соединены не более чем одной дорогой. Из любого города выходит ровно 50 дорог, и в любой город входит ровно 50 дорог. Доказать, что из любого города в любой другой можно попасть, проехав не более двух дорог.

Идея. Карта дорог страны может быть представлена в виде ориентированного графа.

Указания. 1) Построить ориентированный граф дорог страны. 2) Рассмотреть две вершины, не связанные ребром; доказать, что существует третья вершина, связанная рёбрами с выбранными двумя.

Решение. Построим ориентированный граф дорог страны. Вершины графа соответствуют городам, степени всех вершин по условию равны 100 (50 входящих и 50 исходящих рёбер).

Направленные рёбра соединяют две вершины, если соответствующие города соединены дорогой с односторонним движением. Необходимо доказать, что расстояние между любыми двумя вершинами орграфа не превосходит 2.

Поскольку орграф не является полным, найдётся пара вершин, не связанных ребром. Пусть это вершины A и B. Рассмотрим рёбра, которые выходят из A, и рёбра, которые входят в B. Их в сумме $50 + 50 = 100$ штук. Эти рёбра соединяют вершины A и B с оставшимися $101 - 2 = 99$ вершинами графа. Так как число оставшихся вершин на единицу меньше числа рёбер, выходящих из A и входящих в B, найдётся по крайней мере одна вершина, которая будет связана рёбрами и с вершиной A, и с вершиной B.

Мы доказали, что расстояние между любыми двумя вершинами орграфа, не связанными ребром, равно двум; расстояние между вершинами, связанными ребром, очевидно, равно единице. Утверждение доказано.

Задача 3

6-7 В стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, а в каждый такой город входит 21 дорога. Доказать, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Идея. В ориентированном графе число входящих рёбер равно числу исходящих рёбер.

Указания. 1) Построить ориентированный граф дорог страны.
2) Рассмотреть вершину, соответствующую столице; ввести две переменные, равные числу входящих в данную вершину рёбер и числу исходящих из неё рёбер.
3) Составить уравнение для числа входящих и исходящих рёбер орграфа; сделать вывод о значениях введённых переменных.

Решение. Представим ориентированный граф дорог страны, вершины которого соответствуют городам, а направленные рёбра — соединяющим их дорогам с односторонним движением. 100 вершин орграфа соответствуют нестоличным городам, у них по 20 исходящих рёбер и по 21 входящему ребру. Необходимо доказать, что 101-я вершина, соответствующая столице, не имеет входящих рёбер.

Предположим, что 101-я вершина, соответствующая столице, имеет m входящих рёбер и n исходящих рёбер; $m, n \in \mathbb{N}$;

$m, n \leqslant 100$. В любом орграфе суммарное число входящих рёбер совпадает с суммарным числом исходящих рёбер:

$$m + 21 \cdot 100 = n + 20 \cdot 100 \iff m = n - 100 \leqslant 0.$$

Значит, 101-я вершина не содержит входящих рёбер, то есть в столицу нельзя проехать ни из одного города. Утверждение доказано.

Задача 4

$\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что на рёбрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

Идея. В связном графе любая пара вершин связана простой цепью.

Указания. 1) Рассмотреть связный граф; выбрать в нём произвольную вершину.
2) Выбрать вторую вершину, построить простую цепь, связывающую две выбранные вершины.
3) Ориентировать рёбра цепи в направлении от первой выбранной вершины ко второй.

Решение. Рассмотрим связный граф, содержащий $n+1$ вершину. Выберем произвольную вершину A. Согласно определению связного графа между вершиной A и любой другой вершиной этого графа существует как минимум один маршрут.

Заметим, что если две вершины связаны маршрутом, то, удалив циклические участки, можно получить простую цепь, связывающую данные вершины. Рассмотрим простую цепь, связывающую выбранную вершину A и вершину B, отличную от A. Ориентируем рёбра цепи в направлении от A к B. Поскольку в качестве B можно было взять любую из n вершин графа, отличных от A, утверждение доказано.

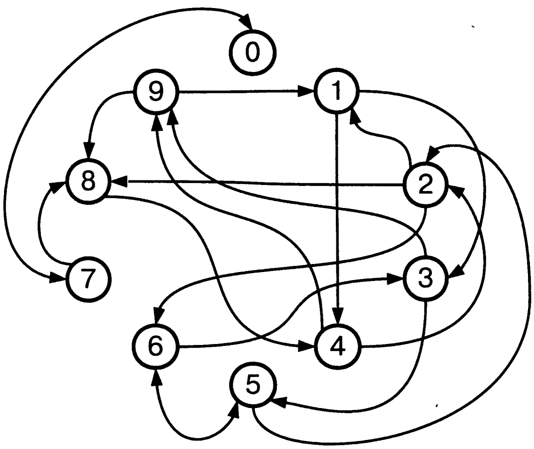
Задача 5

$\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли записать цифры от 0 до 9 в строку так, чтобы число, составленное из любых двух подряд идущих цифр, делилось на 7 или на 13?

Идея. Привести пример.

Указания. 1) Построить ориентированный граф, содержащий 10 вершин. Соединить две вершины направленным ребром, если число, образованное номерами этих вершин, делится на 7 или на 13.
2) Отыскать в построенном графе простую цепь длины 9; начать построение простой цепи с висячей вершины.

Решение. Построим ориентированный граф. Перенумеруем вершины от 0 до 9. Соединим две вершины ребром, если число, составленное из номеров вершин, делится на 7 или на 13. Направление ребра указывает переход от старшего разряда числа к младшему.



Необходимо найти простую цепь, которая содержит 10 вершин.

Заметим, что граф имеет единственную висячую вершину с номером 0. Она может быть только начальной вершиной цепи, поскольку в вершину 7 приходит единственное ребро $0 \leftrightarrow 7$. Первые звенья цепи определяются однозначно:

$$0 \leftrightarrow 7 \to 8 \to 4.$$

Далее перебором находим и остальные звенья:

$$0 \leftrightarrow 7 \to 8 \to 4 \to 9 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2 \to 6.$$

Ответ. Можно; 0784913526.

Замечание. В ходе решения мы показали, что построенный граф содержит *гамильтонов путь* — простой путь, который проходит через каждую вершину графа ровно один раз.

Задача 6

[6-7] В волейбольном турнире проведено несколько матчей, после чего у каждой команды оказалась хотя бы одна победа. Доказать, что из сыгранных матчей можно выбрать несколько так, что если учитывать только эти матчи, то у каждой команды, принимающей участие в них, будет ровно одна победа и одно поражение.

Идея. Описать процедуру поиска контура в ориентированном графе волейбольного турнира.

Указания. 1) Построить орграф турнира.
2) Передвигаясь по выходящим рёбрам, найти контур орграфа.

Решение. Построим ориентированный граф волейбольного турнира. Вершины графа обозначают команды. Две вершины соединены направленным ребром, если между соответствующими командами состоялся матч; направление ребра указывает на переход от выигравшей команды к проигравшей. По условию у каждой вершины есть хотя бы одно выходящее ребро. Необходимо доказать, что в построенном графе есть маршрут, все вершины которого имеют по одному входящему и одному выходящему ребру. Такой маршрут в орграфе называется *контуром.*

Замечание. *Контур* — цикл орграфа, все вершины которого различны.

Построим искомый маршрут. Выберем некоторую вершину орграфа. По условию у неё есть выходящее ребро. Перейдём по этому ребру в следующую вершину и так далее. Поскольку число вершин в орграфе конечно, через несколько шагов мы попадём в вершину, в которой уже побывали. Полученный контур определяет необходимые встречи команд. Утверждение доказано.

Задача 7

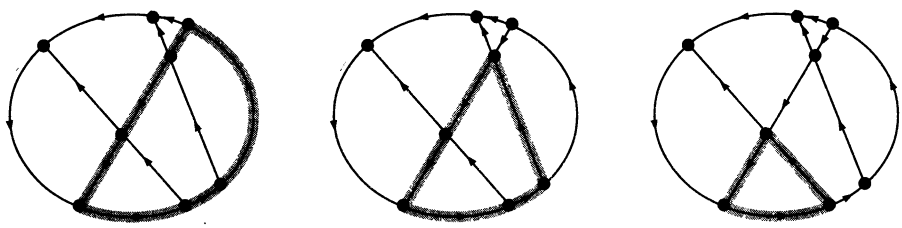
[6-7] Город Зурбаган ограничен кольцевой дорогой. Все улицы начинаются и кончаются на этой дороге и никакие две улицы не имеют двух различных пересечений. Части, на которые улицы разбивают город, называются микрорайонами. В городе ввели одностороннее движение по всем улицам и кольцевой дороге. Доказать, что хотя бы один микрорайон можно объехать вокруг, не нарушив правил движения.

Идея. Построить граф дорог и описать процедуру поиска микрорайона, окружённого ориентированным циклом.

Указания. 1) Построить орграф дорог города Зурбаган.
2) Выбрать любую улицу и рассмотреть часть города, ограниченную выбранной улицей и частью кольцевой дороги и содержащую ориентированный цикл.
3) Повторять описанные выше действия до тех пор, пока не останется один микрорайон, окружённый ориентированным циклом.

Решение. Построим ориентированный граф дорог города Зурбаган. Вершинам графа поставим в соответствие перекрёстки, направленным рёбрам — дороги с односторонним движением. Граф содержит ориентированный цикл, соответствующий кольцевой дороге.

Выберем одну из улиц. Она разбивает город на две части. Возьмём ту часть города, для которой выбранная улица вместе с частью кольцевой дороги образует ориентированный цикл. В примере, изображённом на рисунке слева, выбранная часть города включает три микрорайона.



В этой части города выбираем любую улицу и находим содержащий эту улицу ориентированный цикл (рисунок в центре). Далее рассматриваем ограниченную циклом часть города; в примере на рисунке в центре она состоит из двух микрорайонов. Выбираем любую улицу в этой части города, затем находим ориентированный цикл, содержащий эту улицу, и так далее. Продолжаем выполнять эти действия до тех пор, пока не останется один микрорайон, окружённый ориентированным циклом (рисунок справа).

Утверждение доказано.

Задача 8

7 На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Доказать, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

Идея. Разбить множество вершин орграфа, соответствующего условию задачи, на три группы в зависимости от ориентации рёбер.

Указания. 1) Построить орграф, соответствующий условию.
2) Ввести целочисленные переменные, равные общему числу вершин орграфа и числу вершин, в которые входят два ребра.
3) Выразить через введённые переменные число вершин, из которых выходят два ребра.

Решение. Построим ориентированный граф, вершинам которого соответствуют вершины многоугольника, а направленным рёбрам — стороны многоугольника. Степени всех вершин равны 2.

Пусть орграф содержит n вершин, среди них k вершин имеют по два входящих ребра, а остальные вершины имеют либо по одному входящему и одному выходящему ребру, либо по два выходящих ребра. Необходимо доказать, что число вершин, имеющих по два выходящих ребра, также равно k.

По условию построенный орграф имеет n рёбер, из них $2k$ рёбер входят в k вершин, имеющих по два входящих ребра, а остальные $n - 2k$ рёбер входят в $n - 2k$ вершин, имеющих по одному входящему и одному выходящему ребру.

Остались $n - k - (n - 2k) = k$ вершин, в которые не входит ни одного ребра. Значит, из этих вершин выходят по два ребра. Утверждение доказано.

Задача 9

$\boxed{7}$ По кругу записаны 7 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Доказать, что найдётся пара и несоседних чисел с таким же свойством.

Идея. В орграфе, соответствующем условию, направления рёбер не могут чередоваться.

Указания. 1) Представить ориентированный граф, соответствующий условию задачи.
2) Используя нечётность числа рёбер, показать, что в построенном графе есть простая ориентированная цепь длины 2.

Решение. Представим ориентированный граф, вершины которого расположены по кругу и соответствуют натуральным числам, а направления рёбер указывают на переход от делимого к делителю. Если числа совпадают, то направление ребра, соединяющего соответствующие этим числам вершины графа, может быть произвольным.

По условию в графе 7 вершин и столько же рёбер. Поскольку число 7 нечётное, направления рёбер не могут чередоваться. Значит, в орграфе найдётся по крайней мере одна простая ориентированная цепь длины 2. Пусть эта цепь соединяет вершины x, y и z:

$$x \to y \to z.$$

Так как число x делится на число y, а число y делится на число z, то x делится на z.

Утверждение доказано.

Задача 10

7 В дискуссии приняли участие 15 депутатов. Каждый из них в своём выступлении раскритиковал ровно k из оставшихся 14 депутатов. При каком наименьшем k можно утверждать, что найдутся два депутата, которые раскритиковали друг друга?

Идея. В ориентированном графе дискуссии число пар вершин должно быть меньше числа рёбер.

Указания. 1) Построить орграф дискуссии, содержащий 15 вершин степени k.
2) Найти наименьшее значение k, при котором число пар вершин графа меньше числа рёбер.

Решение. Построим орграф дискуссии. Граф содержит 15 вершин, соответствующих депутатам. От вершины A идёт ориентированное ребро к вершине B, если депутат A в ходе дискуссии критиковал депутата B. По условию из каждой вершины выходят ровно k рёбер, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 14$. Необходимо определить, при каком наименьшем значении натурального числа k в графе найдутся две вершины, соединённые парой встречных рёбер.

Задачу можно переформулировать так: при каком наименьшем значении k число рёбер орграфа, содержащего 15 вершин степени k, больше числа пар вершин этого графа?

Число пар вершин орграфа есть число сочетаний из 15 по 2:

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105.$$

Осталось решить неравенство для числа рёбер:

$$15k > 105 \iff k \geqslant 8.$$

Значит, если каждый депутат раскритиковал не менее 8 коллег, то найдутся два депутата, которые раскритиковали друг друга.

В заключение покажем, что при $k = 7$ дискуссия может пройти без взаимной критики. Предположим, что 15 депутатов сидят за круглым столом и каждый критикует семь коллег, сидящих от него по правую руку. В этом случае никакие два депутата не будут критиковать друг друга.

Ответ. $k = 8$.

Задача 11

$\boxed{7}$ В компанию из n человек пришёл журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек Z, который знает всех остальных членов компании, но его не знает никто. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом: «Знаете ли вы такого-то?»

а) Может ли журналист установить, кто из компании есть Z, задав менее n вопросов?

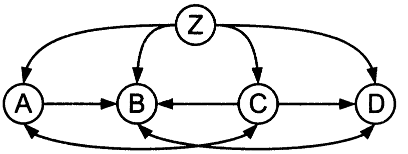
б) Найти наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти Z, и доказать, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

(Все отвечают на вопросы правдиво. Одному человеку можно задавать несколько вопросов.)

Идея. Каждый ответ позволяет исключить из рассмотрения одного сотрудника.

Указания. 1) Представить орграф знакомств сотрудников компании.
2) Организовать перебор пар вершин.
3) Заметить, что ответ на каждый вопрос журналиста позволяет указать ровно одну вершину, которая не соответствует сотруднику Z.

Решение. а) Представим ориентированный граф знакомств членов компании. Граф содержит n вершин. Из некоторой вершины A идёт ориентированное ребро к вершине B, если сотрудник A знает сотрудника B. Из вершины, соответствующей сотруднику Z, выходит $n - 1$ направленное ребро к остальным вершинам графа. Эти вершины могут быть связаны входящими рёбрами, выходящими или неориентированными. Пример орграфа для $n = 5$ изображён на рисунке.



Журналисту не известно, какие вершины графа связаны рёбрами и каковы направления рёбер. Каждый его вопрос членам компании может добавить в граф одно ориентированное ребро. Задача журналиста состоит в том, чтобы, стартуя с произвольной вершины орграфа, определить положение вершины Z.

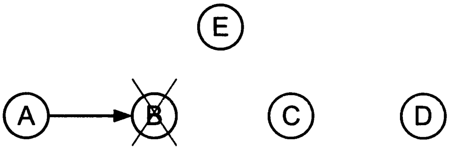
Журналист может действовать по следующему сценарию. Каждой паре сотрудников A, B он задаёт два вопроса: знает ли сотрудник A сотрудника B и знает ли сотрудник B сотрудника A? Правдивые ответы сотрудников компании позволят полностью восстановить структуру орграфа, при этом будут заданы

$$C_n^2 \cdot 2 = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot 2 = n(n-1)$$

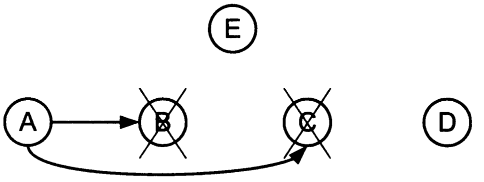
вопросов. Поскольку при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ справедлива оценка $n(n-1) \geqslant n$, этот сценарий не подходит.

Заметим, что для решения поставленной задачи не обязательно владеть исчерпывающей информацией об орграфе. Можно пойти путём последовательного исключения из рассмотрения вершин, заведомо не соответствующих сотруднику Z. Рассмотрим реализацию этой стратегии на примере. Поскольку положение вершины Z пока не известно, обозначим пять вершин орграфа символами A, B, C, D, E.

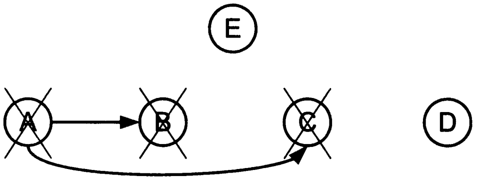
На первом шаге журналист выбирает произвольную пару сотрудников A, B и спрашивает у сотрудника A, знает ли он сотрудника B. В нашем примере журналист получит ответ «да». Этот ответ означает, что сотрудник B не может быть искомым сотрудником Z; вершина B исключается из дальнейшего рассмотрения.



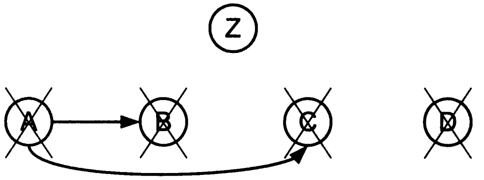
На втором шаге журналист выбирает вторую пару сотрудников из оставшихся, например A и C, и спрашивает у сотрудника A, знает ли он сотрудника C. Ответ «да» в нашем примере означает, что сотрудник C также не может быть искомым сотрудником Z; вершина C исключается из дальнейшего рассмотрения.



На третьем шаге журналист выбирает следующую пару сотрудников, например A и D, и спрашивает у сотрудника A, знает ли он сотрудника D. Ответ «нет» означает, что сотрудник A не может быть искомым сотрудником Z; исключаем вершину A.



В нашем примере осталась единственная пара вершин D, E. Журналист спрашивает у сотрудника D, знает ли он сотрудника E. Отрицательный ответ говорит о том, что вершина D не может быть искомой. Осталась единственная вершина, которая и соответствует сотруднику Z.



Поскольку на каждом шаге исключается одна вершина орграфа, для определения вершины Z журналисту, следующему выбранной стратегии, необходимо задать $n - 1$ вопросов.

б) Покажем, что никакая система вопросов не приводит к цели, если вопросов меньше, чем $n - 1$. Действительно, каждый ответ сотрудников компании позволяет журналисту исключить из рассмотрения только одного человека, и это всегда не Z. Поэтому сотрудник Z всегда будет присутствовать в последней паре опрашиваемых, и для его определения потребуется получить ответы на $n - 1$ вопросов.

Ответ. а) Может; б) $n - 1$.

ОТВЕТЫ

1.

2. Коля — Салтан, Юра — Черномор, Миша — Гвидон.
3. Нет.
5. Да.
6. 20 способами.
7. Нет.
8. а) Да; б) да; в) да.
9. К вечеру 12-го дня.
10. За 31 встречу.
11. За 35 встреч.
12. Нет.
13. Нет.
16. Можно.
17. 16 ходов.
18. а) Можно; б) нельзя.
19. Двустороннее движение на радиальных линиях или на кольцевой линии при наличии только кругового движения.
21. С Ваней, Димой и Толей.
22. 2 партии.

2.

1. а) 200 дорог; б) 66 встреч.
2. 15 партий; 5 партий; 15 очков.
3. а) Нет; б) не заслуживает.
4. Число вершин нечётной степени должно быть чётным.
5. Нет.
6. Нет.
7. Нет.
8. Нет.
9. а) Нет; б) нет.
11. а) Нет; б) нет.
12. а) Нет; б) нет.
15. 36 рук.
16. 4 журнала и 6 посетителей.
20. Девушек больше.
21. Карабасов больше, чем Барабасов.
22. 15 мальчиков и 12 девочек.

23. 6 мальчиков.
25. Верно.
26. 8 человек; 3 партии.
27. а) 16 шахматистов; б) 15 шахматистов.
28. 176 потомков.
32. Нет.
33. Нельзя.
34. Нет.
35. а) Да; б) нет; в) нет.
36. 2, 5 или 11 человек.
37. б) Не сумеет.

3.

2. б) 3.
9. Можно.
11. Три краски.
12. а) Может; б) может.
14. а) Да; б) нет.
15. а) Нет; б) нельзя; в) нет.
16. а) 6 мостов; б) 5 мостов; в) 4 моста.
17. а) Нет; б) 3 раза.
18. а) Можно; с восьмой или десятой комнаты;

б) Почта$\to 1 \to 3 \to$почта$\to 7 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 5$; дядя Степан живёт в доме № 5.

4.

1. По 5 игроков.
2. 6 и 7 городов или 7 и 8 городов.
4. 35 конфет.
7. С четырьмя девочками.
8. Нет.
9. 3 города и 8 городов.
10. 28 учеников.
11. 8 кружков.
15. Не всегда.

5.

2. 20 брёвен.
3. Первый игрок.
4. 6 раз.
5. 1993 курицы.
6. а) Нет; б) нет.
7. Можно; 1385629471.
10. $n-1$ дорог.

12. а) 30 000 рёбер; б) 406 дорог.
15. 174 светильника.

6.

2. 5 островов.
3. 29 муравьёв.
4. 42 треугольника.
9. Нет.
12. Нет.

7.

1. 9 маршрутов.
5. Можно; 0784913526.
10. $k = 8$.
11. а) Может; б) $n - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаханов Н. Х., Подлипский О. К.* Математические олимпиады Московской области. — М.: Изд-во МФТИ, 2003. — 224 с.
2. *Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975. — 111 с.
3. *Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П.* Петербургские математические олимпиады. 3-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2005. — 608 с.
4. *Горбачёв Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004. — 560 с.
5. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): пособие для учителей 5–8 классов / под ред. К. П. Сикорского, изд. 2-е, перераб. — М.: Просвещение, 1971. — 304 с.
6. *Медников Л. Э., Мерзляков А. С.* Математические олимпиады. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 136 с.
7. *Мельников О. И.* Теория графов в занимательных задачах. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 240 с.
8. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Лучшие задачи на смекалку. — М.: НТЦ «Университетский». АСТ-ПРЕСС, 1999. — 304 с.
9. *Петраков И. С.* Математические олимпиады школьников: пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1982. — 96 с.
10. *Спивак А. В.* Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5–7 кл. — 4-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 207 с.
11. *Фарков А. В.* Готовимся к олимпиадам по математике: учебно-методическое пособие. Изд. 5-е, стереотип. — М.: Издательство «Экзамен», 2010. — 158 с.

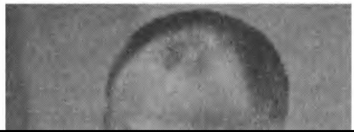
12. *Фарков А. В.* Математические олимпиады в школе. 5–11 класс. — 2-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 160 с.

13. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994. — 309 с.

14. LXVII (67-я) Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. — М.: Изд-во МЦНМО, 2004. — 24 с.

Федотов Михаил Валентинович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математи-

[redacted]



ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА

ИМЕЕТСЯ В ПРОДАЖЕ:

[redacted]

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

[redacted]