



МАТЕМАТИКА—
ПРОСТО КАК 2×2 !

**Нижегородская Творческая
Лаборатория
 2×2**

**Подготовка к турнирам
Лето 5–7 класс**

**Занятие 3
Графы**

Задача 1. Дороги между 1000 городами

Источник: УТЮМ-59, 6 класс, группа «Старт», третья лига, тур 3, задача 6.



В стране 1000 городов, некоторые из них соединены дорогами. Между любыми пятью городами есть не более трёх дорог. Каково наибольшее возможное количество дорог в стране?

Подсказка. Попробуйте доказать, что в одной связной компоненте не может быть 5 или больше городов.

Задача 2. Разделение страны на две республики

Источник: УТЮМ-60, 6 класс, группа «Старт», первая лига, тур 1, задача 4.

В стране 100 городов и несколько дорог. Путешественник заметил, что каким бы способом ни распределить города страны по двум республикам, между этими двумя республиками будет не более 600 дорог.

Докажите, что всего в стране не более 1200 дорог.

Подсказка. Посчитайте одну и ту же величину двумя способами: сколько раз дороги пересекают границу между республиками при всех возможных разделениях городов.

Задача 3. Раскраска рёбер полного графа в 4 цвета

Источник: УТЮМ-59, 6 класс, группа «Старт», высшая лига, тур 4, задача 5.

3

все одного цвета

или все разные

4 цвета

Дан полный граф с $n \geq 3$ вершинами. Нужно покрасить каждое ребро в один из четырёх цветов так, чтобы выполнялись два условия:

1) все четыре цвета встречались; 2) для любых трёх вершин три соединяющих их ребра были либо все одного цвета, либо все разных цветов.

Для какого наибольшего n такая раскраска существует?

Подсказка. Зафиксируйте одну вершину и разбейте остальные вершины на группы по цвету ребра, которое соединит их с этой вершиной.

Задача 4. Красно-синие рёбра в кубе

Источник: УТЮМ-62, 6 класс, группа «Старт», высшая лига, тур 4, задача 2.

4

Строки из 0 и 1 длины 10

Найти цикл, где красные и синие рёбра чередуются

Рассмотрим граф, вершины которого — все строки из нулей и единиц длины 10. Две вершины соединены ребром, если соответствующие им строки отличаются ровно в одной позиции.

В этом графе выбрали 512 рёбер, не имеющих общих концов, и покрасили их в красный цвет. Остальные рёбра покрасили в синий цвет.

Докажите, что найдётся цикл длины не более 18, в котором красные и синие рёбра чередуются.

Подсказка. Попробуйте сжать каждое красное ребро в одну вершину. Что можно сказать про степени вершин в новом графе?

Задача 5. Единственный общий сосед

Источник: УТЮМ-66, 7 класс, младшая группа, третья лига, тур 1, задача 7.

5

Два города А и В соединены дорогами.

Есть город степени не более 2.

Покажите такой город.

В государстве есть несколько городов, между любыми двумя городами не более одной дороги.

Для любых двух городов А и В найдётся ровно один отличный от них город, соединённый дорогами и с А, и с В.

Известно, что есть город, соединённый дорогами не более чем с двумя другими.

Докажите, что есть город, соединённый дорогами со всеми остальными.

Подсказка. Рассмотрите город, из которого выходит не более двух дорог. Отдельно разберите случай, когда из него выходит одна дорога и когда две.

Задача 6. Три дороги из А и В

Источник: УТЮМ-59, 7 класс, младшая группа, третья лига, математический бой №1, задача 5.

В стране всего 10 городов, среди них есть столица А и культурная столица В.

Некоторые города соединены дорогами. Из городов А и В выходит по три дороги, а из каждого из остальных городов — по две дороги.

Из любого города можно добраться до любого другого.

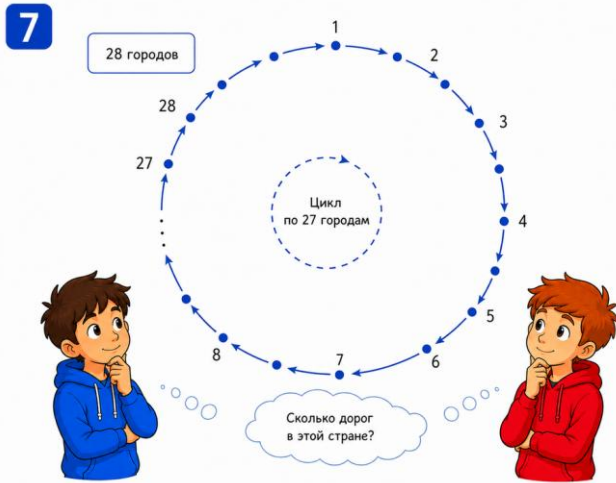
Известно, что все замкнутые маршруты, в которых города не повторяются, содержат по четыре дороги.

Докажите, что между А и В дороги нет.

Подсказка. Предположите, что дорога АВ есть. Тогда кроме неё должны существовать ещё два пути из А в В. Посмотрите, какие циклы они образуют.

Задача 7. Односторонние дороги в 28 городах

Источник: УТЮМ-60, 7 класс, младшая группа, первая лига, математический бой №3, задача 4.



В стране 28 городов. Между некоторыми городами проходят односторонние дороги. При этом нет двух таких городов A и B , что существует и дорога из A в B , и дорога из B в A .

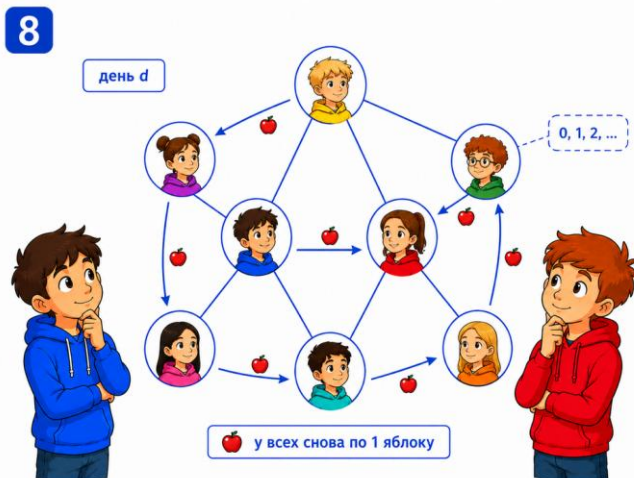
Известно, что для любых 27 городов есть циклический маршрут, проходящий по каждому из этих 27 городов ровно один раз и не проходящий по другим городам.

Какое наименьшее число дорог может быть в этой стране?

Подсказка. Сначала докажите, что из каждого города должно выходить хотя бы две дороги. Потом попробуйте расставить города по кругу.

Задача 8. Яблоки и друзья

Источник: УТЮМ-65, 7 класс, младшая группа, высшая лига, тур 1, задача 7.



В школе некоторые ученики дружат друг с другом. Каждый ученик пронумеровал своих друзей числами от 0 до $n - 1$, где n — количество его друзей. В день d каждый ученик передаёт яблоко другу с номером, равным остатку от деления d на число его друзей. Каждый день после передачи у всех снова оказывается по одному яблоку.

Через некоторое время все снова собираются передавать яблоко другу с номером 0.

Докажите: если два человека дружат, то у них поровну друзей.

Подсказка. Рассмотрите промежутки времени, после которого все снова передают яблоко другу номер 0. Посчитайте, сколько яблок за это время получил один ученик от всех своих друзей.