Нижегородская Творческая Лаборатория 2×2

Подготовка к турнирам

Лето 5–7 класс

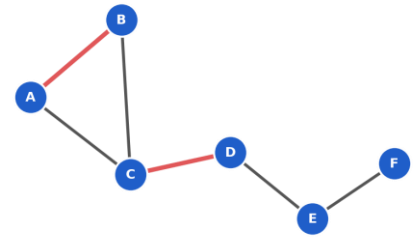
Занятие 3

Графы

Теория и памятка

1. Основные определения

Граф



- Граф — это набор вершин и рёбер. Вершины часто изображают точками, рёбра — линиями между ними.
- Если ребро соединяет вершины A и B, то A и B называются смежными.
- Степень вершины — количество рёбер, выходящих из неё.
- Изолированная вершина имеет степень 0. Висячая вершина, или лист, имеет степень 1.

Обозначения

V — множество вершин, E — множество рёбер.

|V| — число вершин, |E| — число рёбер.

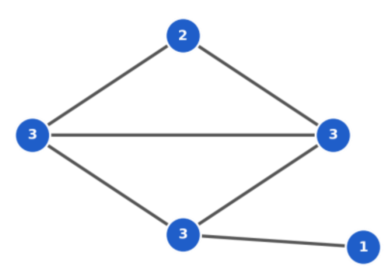
deg(v) — степень вершины v.

Путь, цикл, связность

- Путь — последовательность вершин и ребер, начинающаяся с вершины и заканчивающаяся вершиной, где вершины и ребра чередуются, а соседние в последовательности вершины соединены соответствующим ребром.
- Простой путь — путь, в котором вершины не повторяются.
- Цикл — замкнутый путь, в котором первая и последняя вершины совпадают, а остальные не повторяются.
- Граф связен, если из любой вершины можно добраться до любой другой по рёбрам.
- Компонента связности — максимальный связный подграф графа.

2. Лемма о рукопожатиях

Лемма



- Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу рёбер:
- deg(v1)+deg(v2)+...+deg(vn)=2|E|.
- Причина: каждое ребро имеет два конца и поэтому прибавляет 1 к степени каждой из двух вершин.

Следствия

1) Сумма степеней всегда чётна.

2) Число вершин нечётной степени всегда чётно.

3) Если в графе n вершин и каждая степень не меньше k, то рёбер не меньше nk/2.

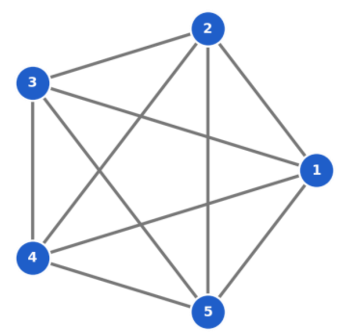
Как применять

Когда в задаче говорится “из каждого города выходит... дорог”, часто нужно посчитать сумму степеней вершин. Если нужно доказать невозможность существования графа с какими-то характеристиками, проверьте чётность числа вершин нечётной степени.

3. Полные графы

Полный граф K_n

- Полный граф — граф, в котором каждая пара разных вершин соединена ребром.
- В полном графе на n вершинах - K_n - у каждой вершины степень n−1.
- Число рёбер в K_n равно n(n−1)/2.



Пример

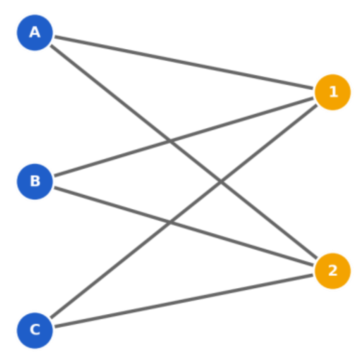
В K_5 пять вершин, каждая соединена с четырьмя остальными.

Число рёбер: 5·4/2=10.

4. Двудольные графы

Определение

- Граф называется двудольным, если его вершины можно разбить на две группы так, что каждое ребро идёт из одной группы в другую.
- Внутри одной группы рёбер быть не должно.
- Полный двудольный граф K_{m,n}: каждая вершина первой группы соединена с каждой вершиной второй группы.
- Число рёбер в K_{m,n} равно mn.



Критерий двудольности

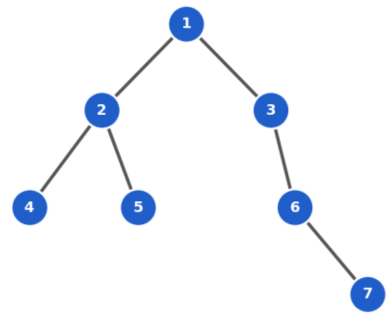
Граф двудолен тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.

Практический способ проверки: попробуйте раскрасить вершины в два цвета так, чтобы концы каждого ребра были разных цветов.

5. Деревья

Дерево

• Дерево — это связный граф без циклов.
• Лес — это несвязный граф, каждая компонента связности которого является деревом.
• В дереве между любыми двумя вершинами существует ровно один простой путь.
• Если в дереве n вершин, то в нём ровно n−1 ребро.
• В любом дереве с n>1 есть хотя бы два листа.



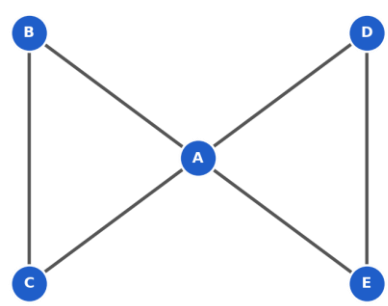
Равносильные свойства дерева

Для графа на n вершинах следующие свойства часто взаимозаменяемы:
• связен и не имеет циклов;
• связен и имеет n−1 ребро;
• не имеет циклов и имеет n−1 ребро;
• между любыми двумя вершинами ровно один путь.

Полезные приёмы

1) Если нужно доказать что-то про дерево, часто удобно удалить лист и применить индукцию.
2) Если в связном графе есть цикл, можно удалить одно ребро цикла, и граф останется связным.

6. Эйлеровы графы



Эйлеров путь и цикл

• Эйлеров путь — маршрут, который проходит по каждому ребру графа ровно один раз.
• Эйлеров цикл — эйлеров путь, который заканчивается там же, где начался.

Критерий для связного графа

1) Эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда степени всех вершин чётные.
2) Эйлеров путь с разными началом и концом существует тогда и только тогда, когда ровно две вершины имеют нечётную степень.
3) Если нечётных вершин больше двух, эйлерова пути нет.

Почему это верно интуитивно

В каждую промежуточную вершину маршрута мы по одному ребру входим и по другому ребру выходим. Поэтому использованные рёбра около такой вершины разбиваются на пары.

Нечётная степень возможна только у начала и конца незамкнутого эйлерова пути.

7. Мини-шпаргалка для задач

Фраза в задаче	Что пробовать
“Сколько дорог всего?”	Сумма степеней, лемма о рукопожатиях.
“Можно ли пройти по всем дорогам?”	Проверить чётность степеней: эйлеров путь или цикл.
“Граф без циклов”	Это лес; если он связен, это дерево, рёбер $n-1$.
“Разбить на две группы”	Проверить двудольность; искать нечётный цикл.
“Каждый соединен с каждым”	Полный граф K_n, число рёбер $n(n-1)/2$.
“Все из одной группы со всеми из другой”	Полный двудольный граф $K_{m,n}$, число рёбер mn.