# Нижегородская Творческая Лаборатория 2х2

# Подготовка к турнирам

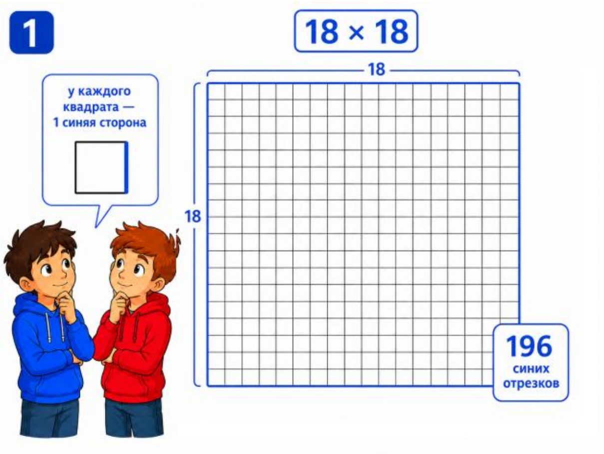
## Лето 5–7 класс

# Занятие 2

### Конструктивы

# Задача 1. Синие стороны квадратов

**Источник:** УТЮМ-59, группа «Старт», третья лига, тур 1, задача 3.

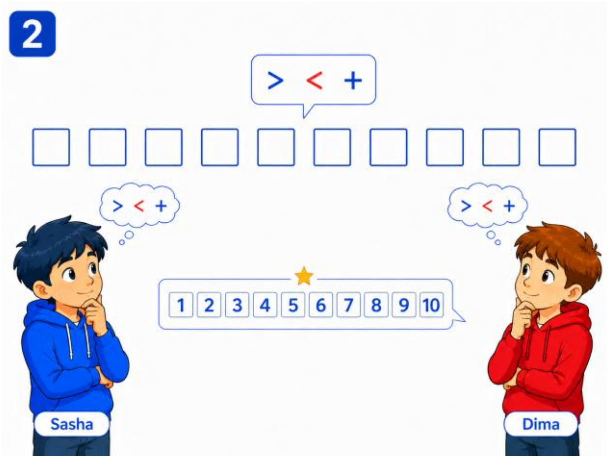



На доске 18 × 18 есть 324 единичных квадрата. Можно ли окрасить в синий цвет ровно 196 отрезков, являющихся сторонами этих квадратов, так, чтобы у каждого единичного квадрата ровно одна сторона оказалась синей?

**Подсказка.** Попробуйте отдельно подумать про клетки на границе доски и про клетки внутри доски.

# Задача 2. Квадратики и знаки

**Источник:** УТЮМ-66, группа «Старт», третья лига, тур 4, задача 3.

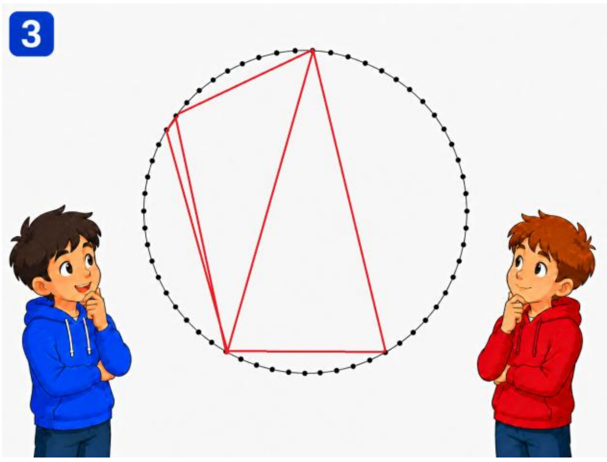



На доске в ряд нарисовано 10 квадратиков. Саша ставит между каждыми двумя соседними квадратами один из знаков «>», «<» или «+» так, что нет двух стоящих плюсов подряд. После этого Дима хочет написать в квадратики натуральные числа от 1 до 10, каждое по разу, так, чтобы все знаки неравенств стали верными. Сможет ли Саша расставить знаки так, чтобы Дима заведомо не справился с задачей?

**Подсказка.** Саше не обязательно использовать много плюсов: иногда один удачно поставленный знак уже сильно ограничивает Диму.

# Задача 3. Красные диагонали стоугольника

**Источник:** УТЮМ-65, группа «Старт», высшая лига, тур 2, задача 5.

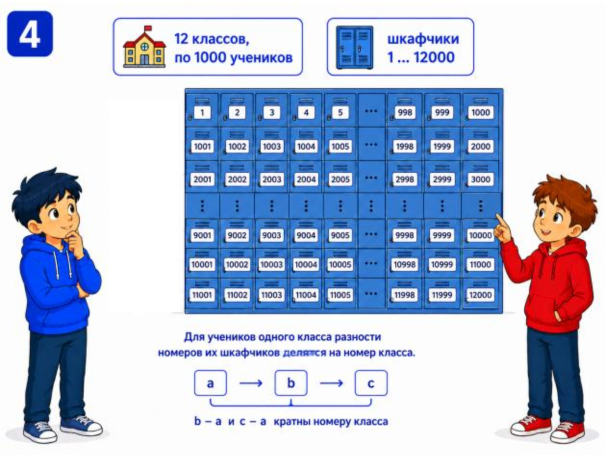



На окружности отмечено 100 точек. Каждая точка соединена с двумя соседними, так что получился стоугольник. В этом стоугольнике уже проведено 98 синих диагоналей. Петя хочет провести несколько красных диагоналей так, чтобы они не пересекались по внутренним точкам, разбивали стоугольник на треугольники и ни одна красная диагональ не совпадала с синей. Верно ли, что Петя всегда сможет это сделать?

**Подсказка.** Попробуйте не строить красные диагонали, а наоборот — придумать такой набор синих диагоналей, который «перекроет» все возможные способы разрезать стоугольник на треугольники.

## Задача 4. Шкафчики для 12 классов

**Источник:** УТЮМ-62, группа «Старт», высшая лига, тур 2, задача 4.

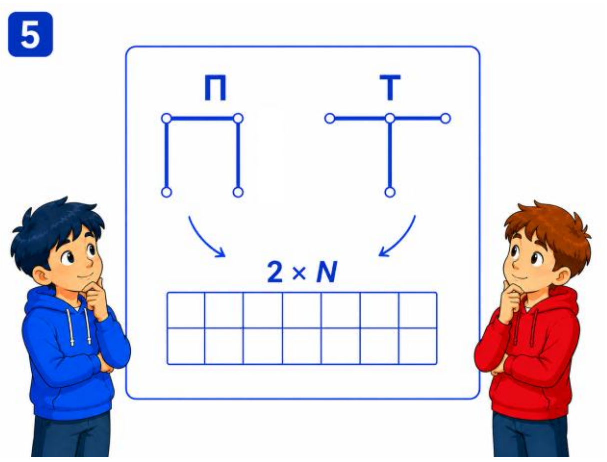



В школе есть по 1000 учеников в каждом классе от первого до двенадцатого. Также в школе есть 12000 шкафчиков, пронумерованных числами от 1 до 12000. Нужно каждому ученику выделить свой шкафчик так, чтобы для каждой пары учеников из одного класса разница номеров их шкафчиков была кратна номеру их класса. Можно ли это сделать?

**Подсказка.** Для учеников одного класса удобно выбрать шкафчики с одинаковым остатком при делении на номер класса.

## Задача 5. Детали П и Т

**Источник:** УТЮМ-66, младшая группа, третья лига, тур 4, задача 8.




У Паши есть конструктор, все детали в котором состоят из трёх палочек длины 1, в форме букв П и Т. Может ли Паша выбрать натуральное число N, взять поровну фигурок каждого вида и из такого набора деталей составить прямоугольник $2 \times N$, полностью разбитый на клеточки со стороной 1? Детали можно поворачивать и соединять в точках, отмеченных кружками. Палочки нельзя накладывать друг на друга.

**Подсказка.** Попробуйте сделать прямоугольник $2 \times 14$.

## Задача 6. Десять чисел от 1 до 1000

**Источник:** УТЮМ-63, младшая группа, высшая лига, тур 1, задача 4.

Можно ли среди чисел от 1 до 1000 выбрать 10 чисел так, чтобы сумма никаких двух выбранных чисел не делилась на сумму никаких двух других выбранных чисел? Например, числа 1, 2, 4 так выбрать нельзя, потому что 1+2=3, 2+4=6, а 6 делится на 3.

**Подсказка.** Попробуйте выбрать 10 чисел достаточно близко друг к другу и достаточно далеко от нуля.

## Задача 7. Ровно k пар делимости

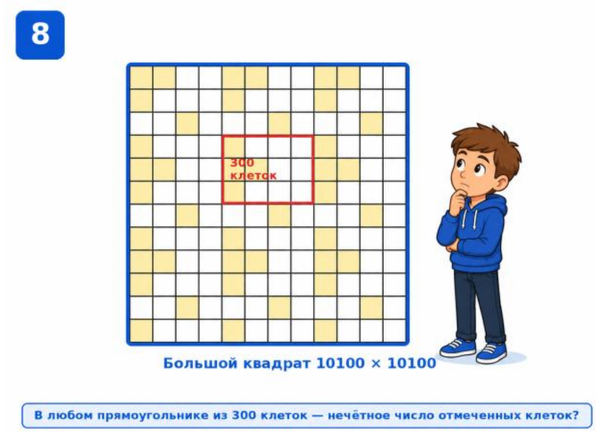
**Источник:** УТЮМ-62, младшая группа, высшая лига, тур 2, задача 6.

Даны натуральные числа $n$ и $k$, причём $k \le n(n-1)/2$. Можно ли выбрать $n$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ так, чтобы существовало ровно $k$ пар $(i, j)$, для которых одно из чисел $a_i$, $a_j$ делится на другое?

**Подсказка.** Сначала научитесь получать много пар делимости с помощью цепочки чисел, где каждое следующее делится на все предыдущие.

## Задача 8. Отмеченные клетки в квадрате

**Источник:** УТЮМ-61, младшая группа, высшая лига, тур 4, задача 2.




Можно ли отметить некоторые клетки квадрата $10100 \times 10100$ так, чтобы в любом прямоугольнике из 300 клеток было нечётное число отмеченных?

**Подсказка.** Попробуйте сначала решить похожую задачу для маленького квадрата $4 \times 4$: отметьте в нём клетки так, чтобы в строках, столбцах и некоторых маленьких прямоугольниках появилось нечётное число отмеченных клеток. Потом подумайте, как повторить этот рисунок по всей большой доске.