



МАТЕМАТИКА– ПРОСТО КАК 2×2 !

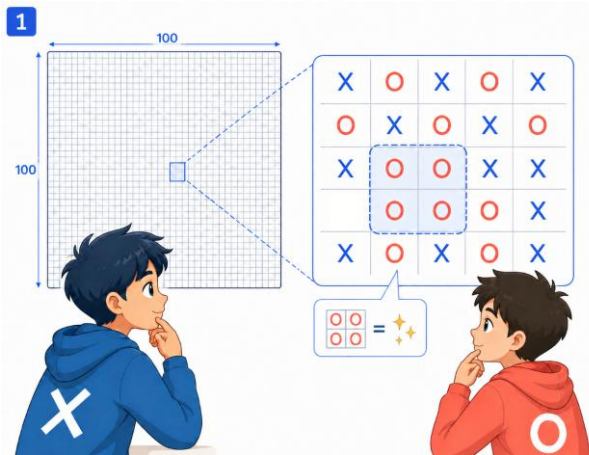
**Нижегородская Творческая Лаборатория
 2×2**

**Подготовка к турнирам
Лето 5–7 класс**

**Занятие 1
Математические игры и стратегии**

Задача 1. Крестики-нолики на доске 100×100

Источник: УТЮМ-66, группа «Старт», вторая лига, тур 3, задача 2.

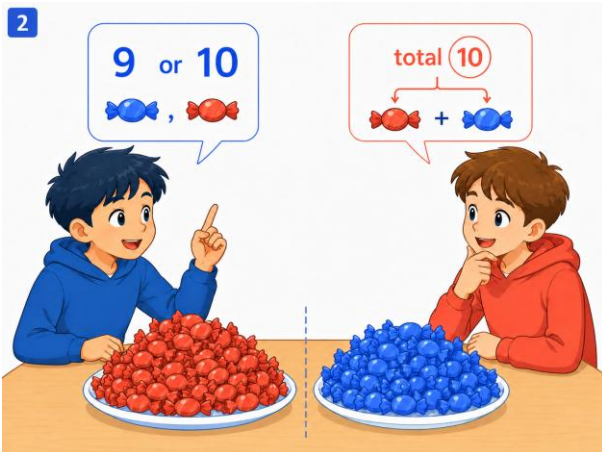


Андрей и Дима играют в крестики-нолики на доске 100×100 , но с необычными правилами: выигрывает тот, после чьего хода на доске впервые образуется квадрат 2×2 из его символов. Андрей играет за крестики, Дима — за нолики. Начинает Андрей. Докажите, что никто из игроков не сможет обеспечить себе победу.

Подсказка. Попробуйте разбить клетки доски на пары так, чтобы в каждом квадрате 2×2 содержалась хотя бы одна пара.

Задача 2. Две кучки по 2025 конфет

Источник: УТЮМ-65, группа «Старт», первая лига, тур 2, задача 8.

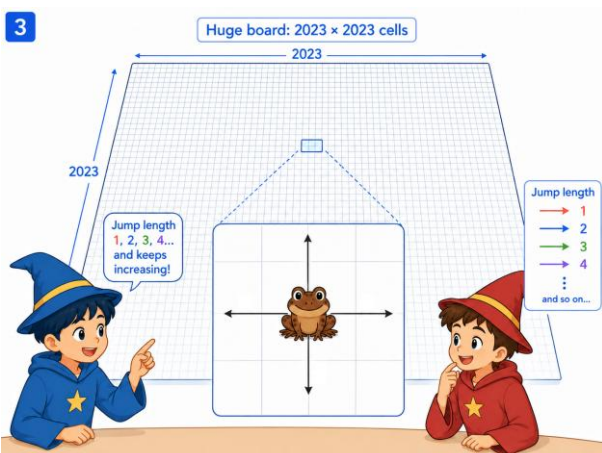


Перед Андреем и Борисом лежат две кучки по 2025 конфет. Они по очереди, начинает Андрей, берут из них конфеты. Андрей может взять 9 или 10 конфет, но только из какой-то одной кучки. Борис может взять 10 конфет в сумме из двух кучек: либо 10 из одной, либо 9 из одной и 1 из другой, и так далее. Проиграет тот, кто не сможет забрать очередную порцию конфет. Кто сможет обеспечить себе победу и как для этого нужно играть?

Подсказка. Подумайте, кто из игроков может влиять на суммарное количество оставшихся конфет и какое количество конфет оставляет ему выигрышным последний ход?

Задача 3. Лягушка на доске 2023×2023

Источник: УТЮМ-60, группа «Старт», высшая лига, тур 3, задача 3.



Волшебники Альбус и Геллерт играют в игру на клетчатом квадрате 2023×2023 . В центральной клетке квадрата сидит шоколадная лягушка. В свой ход волшебник выбирает одно из четырёх направлений, параллельных сторонам квадрата, и заколдовывает лягушку прыгнуть на d клеток в выбранном направлении, где d изначально равно 1 и увеличивается на 1 после каждого прыжка. За пределы квадрата выпрыгивать нельзя. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Альбус начинает. Кто из волшебников может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

Подсказка. Попробуйте ответить прыжком в сторону, противоположную предыдущему ходу соперника.

Задача 4. Лимоны и апельсины на 99 блюдечках

Источник: УТЮМ-63, группа «Старт», высшая лига, тур 1, задача 3.

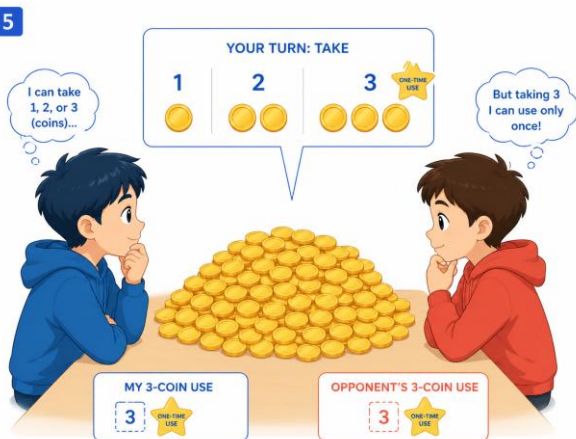


По кругу расположено 99 блюдечек. Петя и Вася играют в игру. Вася на какие-то три блюдечка кладёт по одному лимону, а на остальные 96 — по одному апельсину. После этого они по очереди берут по одному фрукту с блюдечек, пока фрукты не закончатся. Первым ходом Петя берёт любой фрукт. Потом они берут фрукты только с тех блюдечек, которые стоят рядом с хотя бы одним пустым. Выигрывает тот, кто в итоге получил больше лимонов. У кого из мальчиков есть выигрышная стратегия?

Подсказка. Разберите, как могут лежать три лимона: все подряд, два подряд или два не рядом.

Задача 5. Игра со 100 монетами

Источник: УТЮМ-65, младшая группа, третья лига, тур 2, задача 4.



На столе лежат 100 монет. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди берут со стола 1, 2 или 3 монеты. Но брать 3 монеты каждому из игроков разрешено не более одного раза за игру. Тот, кто возьмёт со стола последнюю монету, побеждает. Начинает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

Подсказка. Используйте стратегию дополнения.

Задача 6. Игра со звёздочками

Источник: УТЮМ-60, младшая группа, третья лига, тур 1, задача 3.

На доске написано выражение:

$$*^5 + *^5 + *^5 + *^5 + *^5$$

Петя и Вася по очереди заменяют по одной звёздочке на нечётные цифры, начинает Петя. Затем считается значение выражения. Вася хочет добиться того, чтобы оно являлось простым числом, Петя хочет ему помешать. Сможет ли Вася добиться своего независимо от действий Пети?

Подсказка. Рассмотрите остатки при делении степеней на 3.

Задача 7. Числа от 1 до 1001

7



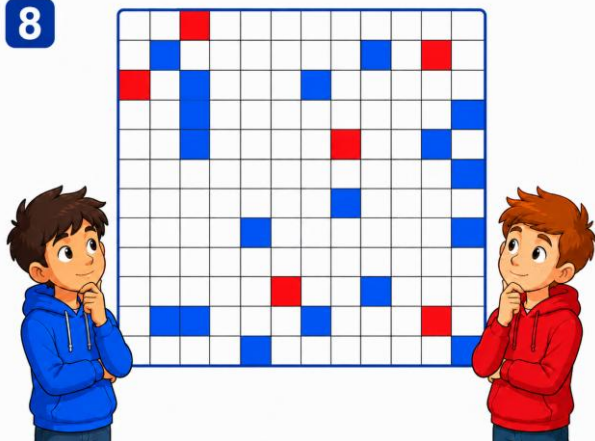
Источник: УТЮМ-59, младшая группа, высшая лига, тур 3, задача 2.

Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 1001 по одному разу. Они по очереди подчёркивают ещё не подчёркнутые числа, начинает Алиса. Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчёркнутых чисел впервые поделится на 1001. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Подсказка. Разложите 1001 на простые множители и попробуйте после первого хода Алисы оставить ей чётное число безопасных ходов.

Задача 8. Раскраска квадрата 12×12

8



Источник: УТЮМ-63, младшая группа, высшая лига, тур 1, задача 8.

Саша и Паша по очереди закрашивают клетки квадрата 12×12 в красный и синий цвет. Закрашивать дважды одну и ту же клетку запрещено. Начинает Саша. За один ход он красит одну клетку, а Паша — сразу три. Саша выигрывает, если по окончании игры найдётся диагональ, в которой количества красных и синих клеток отличаются хотя бы на 2, иначе выигрывает Паша. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Подсказка. Попробуйте избежать одну из главных диагоналей.