

Занятие номер	Класс	Тема
25	6 профи	Взвешивания

1. Решение.

Разделим все монеты на 3 кучки: из 6 монет, из 6 монет и из 5 монет.

1-е взвешивание: на одну чашу весов кладем первую кучку из 6 монет, на другую чашу весов – вторую кучку из 6 монет. Если весы в равновесии, то фальшивая монета (ФМ) находится в третьей кучке. Если весы не в равновесии, то ФМ находится в чаше, которая поднялась. Таким образом, за 1-е взвешивание мы определили подозрительную кучку монет.

2-е взвешивание: на одну чашу весов кладем 2 монеты из подозрительной кучки, на вторую чашу весов – другие 2 монеты из подозрительной кучки, оставшиеся 1 или 2 монеты отложим в сторону. Если одна из чаш перевесила, то ФМ находится в поднявшейся чаше. Если весы в равновесии, то ФМ – это одна из отложенных монет, не участвовавшая в этом взвешивании. Если отложена была 1 монета, то она – ФМ, и третье взвешивание не требуется.

3-е взвешивание: на одну чашу весов кладем одну монету из подозрительной кучки, на вторую чашу весов – вторую монету из подозрительной кучки. Если одна из чаш перевесила, то ФМ находится в поднявшейся чаше. Равновесия быть не может, так как одна из монет на весах фальшивая.

Ответ: см. решение.

2. Решение.

Заметим, что за каждое взвешивание мы можем определить, какая из трех кучек монет является подозрительной. Это возможно в том случае, когда хотя бы две кучки содержат одинаковое количество монет (их кладем на чаши весов, третья кучка во взвешивании не участвует).

Чтобы провести как можно меньше взвешиваний, нужно, чтобы подозрительная кучка после каждого взвешивания была как можно меньше. А это возможно, если перед каждым взвешиванием мы делим все подозрительные монеты на три равные кучки (или две равные, а третья отличается на 1-2 монеты).

81 монету мы можем разделить сначала на 3 кучки по 27 монет и провести 1-е взвешивание. По результатам этого взвешивания одна кучка из 27 монет будет подозрительной.

27 можно разделить на 3 кучки по 9 монет и провести 2-е взвешивание. По результатам этого взвешивания одна кучка из 9 монет будет подозрительной.

Аналогично за 3-е взвешивание мы определяем подозрительную кучку из 3 монет, за 4-е взвешивание определяем ФМ.

Таким образом, понадобится, как минимум, 4 взвешивания.

Ответ: см. решение.

3. Решение.

Обозначим все медали так: 31, 32, 33, С1, С2, С3, М1, М2, М3.

1-е взвешивание: на одну чашу весов положим медали 31, С1, М1, на другую чашу – медали 32, С2, М2. Возможны такие результаты 1-го взвешивания:

1) Если одна чаша перевесила, то фальшивая медаль находится в более легкой чаше, а монеты 33, С3 и М3 точно настоящие. Пусть более легкая чаша – с монетами 31, С1, М1 (случай, когда более легкая чаша – с монетами 32, С2, М2, рассматривается аналогично). Тогда проводим *2-е взвешивание:* на одной чаше – монеты 31 и С3, на другой – монеты 33 и С1. Если весы в равновесии, то фальшивая

монета М1. Если 31 и С3 перевесили, то фальшивая монета С1. Если 33 и С1 перевесили, то фальшивая монета 31.

2) Если при 1-м взвешивании весы в равновесии, то фальшивой монеты на весах нет, то есть монеты 31, 32, С1, С2, М1, М2 настоящие. Значит, она среди монет 33, С3 и М3. Проводим 2-е взвешивание: на одной чаше – монеты 31 и С3, на другой – монеты 33 и С1. Если весы в равновесии, то фальшивая монета М3. Если 31 и С3 перевесили, то фальшивая монета 33. Если 33 и С1 перевесили, то фальшивая монета С3.

Ответ: см. решение.

4. Решение.

1-е взвешивание: на каждой чаше весов по 2 серебряные и 1 золотой монете, а оставшиеся 1 серебряная и 2 золотые монеты отложены. Возможны такие результаты этого взвешивания:

1) Весы в равновесии, значит, все монеты на них настоящие, а ФМ находится среди отложенных монет. Тогда *2-е взвешивание:* на каждой чаше весов – по 1 золотой монете из отложенных. Если весы в равновесии, то ФМ – отложенная серебряная, если весы не в равновесии, то ФМ – перевесившая (тяжелая) золотая.

2) Весы не в равновесии, значит, ФМ – либо золотая, и она находится в перевесившей чаше, либо серебряная, и она находится в поднявшейся чаше. Тогда *2-е взвешивание:* на каждой чаше весов – по 1 серебряной монете из поднявшейся чаши. Если весы в равновесии, то ФМ – золотая монета в перевесившей в 1-м взвешивании чаше, если весы не в равновесии, то ФМ – серебряная монета в поднявшейся (легкой) чаше.

Ответ: см. решение.

5. Решение.

Разделим 2022 монеты на 3 кучки по 674 монеты.

1-е взвешивание: на одну чашу весов положим одну кучку, на вторую чашу – другую кучку, третью кучку отложим в сторону.

Если весы в равновесии, то ФМ находится в третьей кучке, а в первой и второй кучках все монеты настоящие. Тогда *2-е взвешивание:* на одной чаше – первая кучка, на другой чаше – третья кучка. Если перевесила первая кучка, то ФМ легче настоящей. Если перевесила третья кучка, то ФМ тяжелее настоящей.

Если после первого взвешивания весы не в равновесии, то ФМ находится в одной из кучек на весах, а в третьей кучке все монеты настоящие. Тогда *2-е взвешивание:* на одной чаше весов – перевесившая в 1-м взвешивании кучка (пусть это первая кучка), на другой чаше – третья кучка. Если весы в равновесии, то ФМ находится во второй кучке, и она легче настоящей. Если перевесила первая кучка, то ФМ находится в первой кучке, и она тяжелее настоящей.

Если монет 2024, то разделим их на 3 кучки так: 674, 674 и 676 монеты. В первом взвешивании сравним кучки по 674 монеты. Если весы в равновесии, то в первых двух кучках все монеты настоящие, выбираем из них любые 676 монет и во втором взвешивании сравниваем кучку из 676 настоящих монет и третью кучку из 676 монет. Если весы не в равновесии, то в третьей кучке все монеты настоящие, убираем из этой кучки любые 2 монеты и во втором взвешивании сравниваем первую кучку из 674 монет и третью кучку из 674 монет.

Ответ: см. решение.

6. Решение.

Положим на одну чашу весов кучку из 19 бриллиантов, на другую – 19 бриллиантов из второй кучки, отложив 4 бриллианта в сторону.

Если весы в равновесии, то все бриллианты на весах настоящие. Значит, в кучке из 19 монет все бриллианты настоящие.

Если весы не в равновесии, то фальшивый бриллиант находится на весах. Значит, в кучке из 29 монет, которая не участвует во взвешивании, все бриллианты настоящие.

Таким образом, за одно взвешивание можно определить кучку, в которой все бриллианты настоящие.

Ответ: см. решение.

7. Решение.

Пусть Н – настоящая монета, Ф – фальшивая монета. Тогда монеты в ряду могут располагаться только так: НФФФ, ННФФ или НННФ. Как видим, первая монета в ряду в любом случае настоящая, а последняя – в любом случае фальшивая.

Положим на левую чашу весов первую и последнюю монеты в ряду (как известно, одна из них настоящая, а другая фальшивая), а на правую – вторую и третью монеты в ряду. Возможны такие результаты:

- 1) Весы в равновесии. Это значит, что на правой чаше весов находятся также настоящая и фальшивая монеты. Это соответствует такому расположению монет в ряду: ННФФ.
- 2) Левая чаша перевесила. Это значит, что на правой чаше весов находятся две фальшивые монеты. Это соответствует такому расположению монет в ряду: НФФФ.
- 3) Левая чаша поднялась вверх. Это значит, что на правой чаше весов находятся две настоящие монеты. Это соответствует такому расположению монет в ряду: НННФ.

Таким образом, за одно взвешивание можно определить тип каждой монеты в ряду.

Ответ: см. решение.

8. Решение.

Пронумеруем монеты по кругу от 1 до 9.

1-е взвешивание: на одной чаше весов монета 1, на другой чаше – монета 4. Возможны такие результаты:

- 1) Весы в равновесии. Значит, монеты 1 и 4 (а также 2 и 3) настоящие. Проводим *2-е взвешивание:* на одной чаше монета 5, на другой – монета 9. Если весы в равновесии, то фальшивые – монеты 6, 7, 8, если перевесила монета 5, то фальшивые – монеты 7, 8, 9, если перевесила монета 9, то фальшивые – монеты 5, 6, 7.
- 2) Весы не в равновесии. Допустим, перевесила чаша с монетой 1. Тогда монета 1 настоящая, а монета 4 фальшивая. Проводим *2-е взвешивание:* на одной чаше монета 2, на другой – монета 6. Если весы в равновесии, то фальшивые – монеты 3, 4, 5, если перевесила монета 2, то фальшивые – монеты 4, 5, 6, если перевесила монета 6, то фальшивые – монеты 2, 3, 4.
- 3) Случай, когда при 1-м взвешивании перевесила монета 4, рассматривается аналогично.

Ответ: см. решение.

9. Решение.

Обозначим монеты 31, 32, С1, С2, М1, М2.

Первым взвешиванием взвесим пару 31 и С1 с парой 32 и М1. Разберем два случая:

1) весы в равновесии. Поскольку среди золотых ровно одна фальшивая, то и среди С1 и М1 ровно одна фальшивая и ровно одна настоящая. И на каждой чаше лежит одна настоящая и одна фальшивая. Тогда вторым взвешиванием взвесим С2 и М2. Равновесие уже невозможно, поэтому мы в любом случае определим, какая из монет легче. Пусть это М2, тогда М1, С2 и 32 настоящие. Если же это С2, то настоящие М2, С1 и 31.

2) Одна чаша перевесила. Пусть тяжелее 31 и С1 (второй вариант разбирается аналогично). Это означает, что 31 точно настоящая, 32 – фальшивая. Для пары С1,М1 возможны варианты НН, ФФ и НФ, варианта ФН быть не может. Теперь вторым взвешиванием взвесим обе золотые монеты с парой С2 и М2. Если весы окажутся в равновесии, то означает, что реализуется вариант НФ, если золотые перевесят, то обе монеты С2 и М2 фальшивые, если же перевесит чаша с серебряной и медной монетой, то они обе настоящие.

Ответ: см. решение.