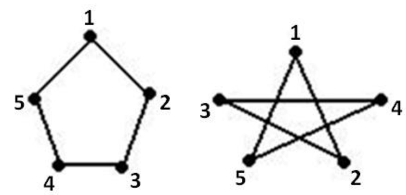
Занятие номер	Класс	Тема
27	5 база	Изоморфные графы.

1. Решение.

Пронумеруем графы в том порядке, в котором они представлены на рисунке.

У графов 1, 3 и 4 по 5 вершин, они не могут быть изоморфны графам 2 или 5, у которых по 4 вершины. Кроме того, в графах 1 и 4 из каждой вершины выходит по 2 ребра, значит, эти графы не могут быть изоморфны графу 3, в котором из двух вершин выходит по 3 ребра.

Графы 1 и 4 изоморфны. Действительно, пронумеруем вершины графов, как показано на рисунке. Получим, что ребра в графе 1 соединяют вершины с теми же номерами, что и в графе 4, и наоборот, если в графе 1 между вершинами нет ребра, то и в графе 4 тоже нет ребра между вершинами с таким же номерами.



Осталось выяснить, изоморфны ли графы 2 и 4. В графе 2 есть вершина степени 1, в графе 5 такой вершины нет. Значит, мы не сможем пронумеровать вершины графов так, чтобы множества ребер в обоих графах были одинаковыми. Значит, эти графы не изоморфны.

Ответ: графы 1 и 4 изоморфны друг другу, остальные не изоморфны ни им, ни друг другу.

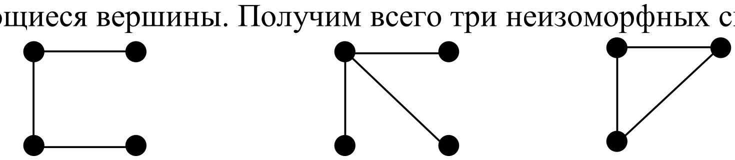
2. Решение.

а) Две вершины в графе могут быть изолированными (не соединены ребром) или соединены одним ребром. Получаем всего 2 графа с двумя вершинами, которые не изоморфны друг другу:

б) Неизоморфных графов с тремя ребрами бесконечное количество. Действительно, если взять любой граф с тремя ребрами и добавить к нему изолированную (не соединенную с другими вершинами) вершину, то получим граф с тремя ребрами, не изоморфный первому, так как в них разное количество вершин. Добавив ко второму графу еще одну вершину, получим еще один граф, не изоморфный ни первому, ни второму. И так можно продолжать до бесконечности.

в) Заметим, что в связном графе нет вершин степени 0 (изолированных вершин). Построим сначала все возможные графы с двумя ребрами без изолированных вершин. Это можно сделать двумя способами:

Добавим теперь третье ребро, так чтобы получился связный граф. В первом случае мы можем добавить еще одну вершину и соединить ее ребром с одной из имеющихся вершин или соединить ребром две имеющиеся вершины степени 1. Во втором случае мы можем только соединить ребром две имеющиеся вершины. Получим всего три неизоморфных связных графа с тремя ребрами:



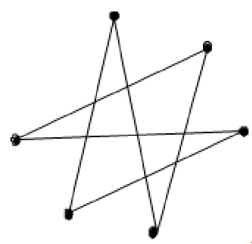
г) В задаче 3 (см. ниже) найдены все возможные неизоморфные графы с четырьмя вершинами. Среди них 5 несвязных.

Ответ: а) 2, б) бесконечное количество, в) 3, г) 5.

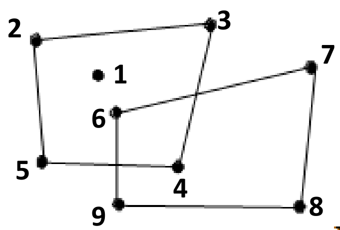
3. Решение.

Два графа с разным количеством вершин не могут быть изоморфными. Кроме того, два графа с разным количеством компонент связности не могут быть изоморфными. Учитывая это, можно разбить все графы на группы так (для иллюстрации изоморфизма в группах, где больше одного графа, вершины графов пронумерованы):

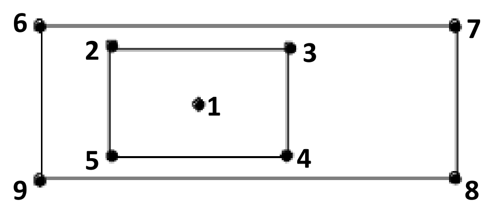
Группа 1:


A

Группа 2:

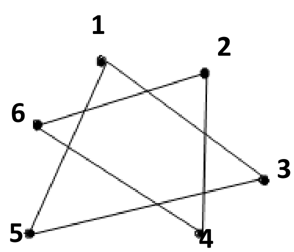


B

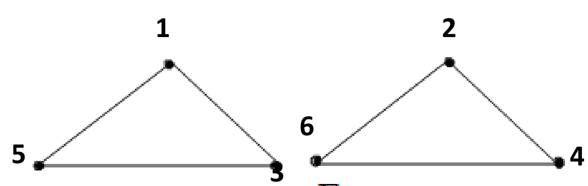


H

Группа 3:

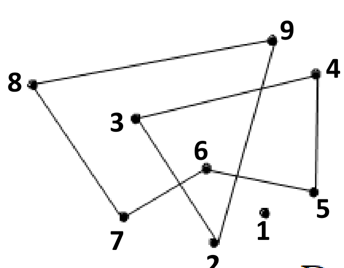


C

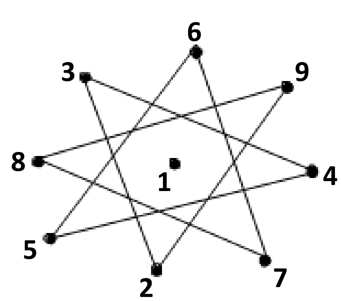


F

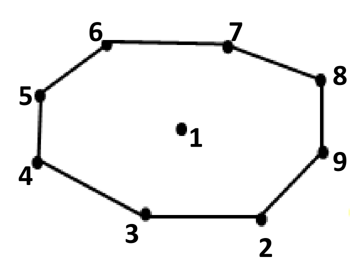
Группа 4:



D



E



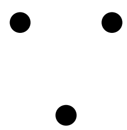
G

Ответ: см. решение.

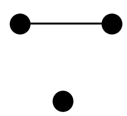
4. **Решение.**

а) Граф с тремя вершинами может иметь от 0 (ни одного ребра) до 3 (полный граф) ребер. Нарисуем 3 вершины и будем добавлять по 1 ребру всеми возможными способами. Исключая на каждом шаге изоморфные варианты графов, получим следующие неизоморфные графы.

Без ребер

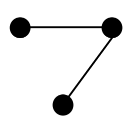


С 1 ребром:



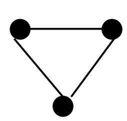
С 2 ребрами:

:



С 3 ребрами:

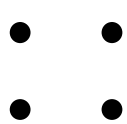
:



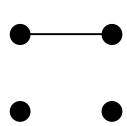
Всего 4 различных графов.

б) Граф с четырьмя вершинами может иметь от 0 (ни одного ребра) до 6 (полный граф) ребер. Нарисуем 4 вершины и будем добавлять по 1 ребру всеми возможными способами. Исключая на каждом шаге изоморфные варианты графов, получим следующие неизоморфные графы.

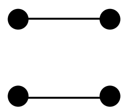
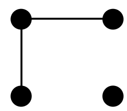
Без ребер:



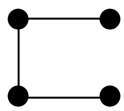
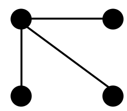
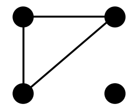
С 1 ребром:



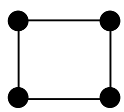
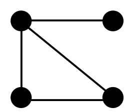
С 2 ребрами:

С 3 ребрами:

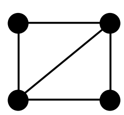
  

С 4 ребрами:

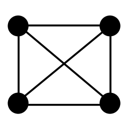
(Заметим, что убрать 2 ребра из полного графа мы можем столькими же способами, что и добавить 2 ребра в граф без ребер. Поэтому вариантов графов с 6-2=4 ребрами столько же, сколько с 0+2=2 ребрами.)

С 5 ребрами:



(Заметим, что убрать 1 ребро из полного графа мы можем столькими же способами, что и добавить 1 ребро в граф без ребер. Поэтому вариантов графов 5 ребрами столько же, сколько с 1 ребром.)

С 6 ребрами:



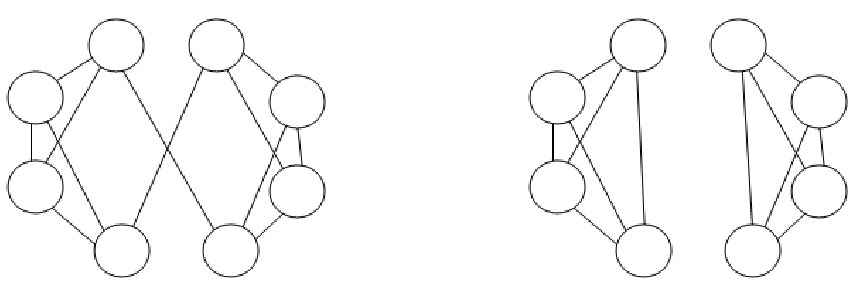
Всего 11 различных графов.

Ответ: см. решение.

5. Решение.

а) Это верно. Если в каждом графе 10 вершин и степень каждой вершины равна 9, то это два полных графа с 10 вершинами. Такие графы изоморфны. Более того, для доказательства этого можно пронумеровать вершины графов в любом порядке. Так как оба графа полные, то в них есть ребра между любыми двумя вершинами.

б) Это неверно. Рассмотрим два графа на рисунке. У каждого из них по 8 вершин и степень каждой вершины равна 3. Но эти графы не изоморфны – один из них связный, а другой нет:



Ответ: а) верно, б) неверно.

Домашнее задание 27.

Ответ: