Занятие 25	3 класс профи	Дополнительный	Тема: чётность

1. Решение.

Если в числе есть хотя бы одна чётная цифра, то произведение всех цифр этого числа будет чётным. Действительно, если без этой цифры произведение нечётное, то при умножении на чётную цифру станет чётным (Н*Ч=Ч). Если же произведение было чётным (заметим, что в этом случае точно есть еще чётная цифра), то при умножении на чётную цифру останется чётным (Ч*Ч=Ч).

Гришина программа выдала нечётный ответ. То есть, произведение всех цифр заданного Гришей числа – нечётное число. Значит, в заданном числе нет ни одной чётной цифры, то есть, все цифры нечётные. Следовательно, последняя цифра числа тоже нечётная, а значит, и само число – нечётное.

Ответ: нечётное, см. решение.

2.

Решение.

Сначала был 1 кусок (целая льдина). После каждого раскола количество кусков увеличивалось на 2 (если кусок раскалывался на 3 части) или на 4 (если кусок раскалывался на 5 частей).

То есть, сначала было нечётное количество кусков. Затем каждый раз прибавлялось чётное. Значит, после каждого броска число кусков оставалось нечётным (Н+Ч=Н), и в результате должно получиться нечётное количество кусков. Таким образом, чётное число 1000 не могло получиться ни через какое количество бросков.

Ответ: нет, см. решение.

3. Решение.

Допустим, Гриша получил нечётный результат. Значит, все 10 чисел нечётные (если в произведении есть хотя бы одно чётное число, то произведение чётно). Но сумма 10 нечётных чисел (чётного количество нечётных слагаемых)– чётна, то есть Аня не могла получить нечётный результат.

Значит, предположение неверно, и Гриша получил чётный результат.

Ответ: чётный.

4. Решение.

Заметим, что в ряду от 1 до 8 всего 8 чисел, из которых 4 числа – нечётные (1, 3, 5, 7) и 4 числа – чётные (2, 4, 6, 8).

Посмотрим, в каких случаях вообще сумма трёх чисел будет нечётной. Для этого переберём все возможные варианты:

1. 3 нечётных числа и 0 чётных чисел: Н+Н+Н=Н.
2. 2 нечётных числа и 1 чётное число: Н+Н+Ч=Ч.
3. 1 нечётное число и 2 чётных числа: Н+Ч+Ч=Н.
4. 0 нечётных чисел и 3 чётных числа: Ч+Ч+Ч=Ч.

Видим, что сумма будет нечётной, если:

1) все три числа нечётные;

2) одно число нечётное и два чётных.
Рассмотрим каждый из этих вариантов.
1) Если среди 8 чисел будут 3 подряд идущих нечётных числа, то и все остальные числа должны быть нечётными, так как если встретится хотя бы одно чётное число, то появится тройка «Н, Н, Ч», сумма которой – чётное число. А по условию сумма любых трёх подряд идущих чисел должна быть нечётной. Но у нас 4 чётных числа и 4 нечётных, значит, такой вариант невозможен.
2) Если же любая тройка чисел будет состоять из одного нечётного числа и двух чётных, то в ряду может быть максимум 3 нечётных числа:
Н, Ч, Ч, Н, Ч, Ч, Н, Ч
или Ч, Н, Ч, Ч, Н, Ч, Ч, Н
или Ч, Ч, Н, Ч, Ч, Н, Ч, Ч.
Но у нас 4 чётных числа и 4 нечётных, значит, такой вариант тоже невозможен.
Таким образом получили, что нельзя расставить числа от 1 до 8 в ряд так, чтобы сумма любых трёх подряд идущих чисел была нечётной.

Ответ: нельзя, см. решение.

5.

Решение.
От 1000 до 5999 всего 5999-999=5000 чисел.
В ряду последовательных натуральных чисел чередуются чётные и нечётные числа. Поэтому среди 5000 чисел есть 2500 чётных и 2500 нечётных чисел. Значит, сумма этих чисел содержит 2500 (чётное число) нечётных слагаемых, поэтому будет чётной.

Ответ: чётной.

6.

Решение.
Сумма двух чисел нечётна только в том случае, если одно из чисел чётное, а другое нечётное. Значит, например, первые два числа должны быть чётное и нечётное. Третье число будет чётным или нечётным. Но тогда либо сумма первого числа с третьим окажется чётной, либо второго числа с третьим. То есть, нельзя даже три числа найти таких, что сумма любых двух из них нечётна. Тем более, нельзя найти четыре таких числа.

Ответ: нельзя, см. решение.

7. **Решение.**
Если количество котлет в соседних тарелках различается на 1, то в тарелках чередуется чётное и нечётное количество котлет. Так как тарелки расположены по кругу, то тарелок с чётным и нечётным количеством котлет будет поровну. То есть, общее количество тарелок будет чётным.
Таким образом, 10 тарелок может быть (например, разложить котлеты можно так: 0, 1, 0, 1 и т.д.), а 2013 тарелок не может быть, так как это нечётное число.

Ответ: А) можно; Б) нельзя.

8.

Решение.
После каждого рассказа с нечётным количеством страниц меняется чётность начальной страницы следующего рассказа. Поэтому чётность начальной страницы изменяется не менее 2 раз (один из 3 рассказов с нечётным количеством страниц может оказаться в книге последним). Таким образом, не менее одного раза рассказы начинаются с чётной страницы, и тем самым не более пяти раз – с нечётной.
Например, если в начале книги поместить все рассказы с чётным количеством страниц, а затем все рассказы с нечётным количеством страниц, то ровно 5 рассказов будут начинаться с нечётной страницы.

Ответ: 5 рассказов.

9. Решение.

Первые 9 страниц пронумерованы числами от 1 до 9. Сумма цифр меняет чётность при переходе к каждому следующему числу, так как число каждый раз увеличивается на 1. Среди чисел от 1 до 9 есть 5 чисел с нечётной суммой цифр и 4 числа с чётной суммой.

При переходе в следующий десяток чётность суммы цифр не меняется (у числа 10 сумма цифр равна 1 – нечётное число, как и у 9), но в пределах десятка чётность суммы цифр снова чередуется, так как меняется только последняя цифра и увеличивается каждый раз на 1. То есть, среди 10-ти чисел от 10 до 19 будет одинаковое количество чисел с чётной и нечётной суммой цифр.

Таким образом, в пределах каждого десятка от 10 до 999, а, значит, и среди всех чисел от 10 до 999, будет одинаковое количество чисел с чётной и нечётной суммой цифр.

У числа 1000 сумма цифр равна 1 – нечётное число.

Получили, что от 1 до 1000 нечётных сумм цифр на 2 больше, чем чётных. Значит, у Машеньки получилось больше страниц с нечётной суммой цифр.

Ответ: с нечётной.

10. Решение.

В ряду последовательных натуральных чисел нечётные и чётные числа чередуются, и соседние числа отличаются на 1. То есть, первое чётное число будет больше первого нечётного на 1 (2-1=1), второе чётное число будет больше второго нечётного на 1 (4-3=1) и т.д., сотое чётное число будет больше сотого нечётного на 1. Таких пар будет 100, значит, разница между первыми ста чётными числами и первыми ста нечётными будет равна 100.

Ответ: 100.

11.

Решение.

Досок не меньше 54, так как есть доска номер 53, а следующее чётное число – это 54.

Досок не больше 54. 55 – нечётное число. 56 уже быть не может, так как 56 делится и на 7, и на 8. Значит, 56 доска должна быть покрашена и в синий, и в зелёный цвет, но по условию, каждая доска покрашена ровно один раз. Больше 56-ти досок тем более не может быть.

Значит, досок ровно 54.

Ответ: 54 доски.

12. Решение.

В первом утверждении жителя А 3 слова, во втором – 5 слов. Значит, либо оба утверждения жителя А ложны, либо оба правдивы.

В первом утверждении жителя Б 4 слова, во втором – 5 слов. Значит, одно из утверждений жителя Б – ложь, другое – правда.

Тогда утверждение «Но все наши утверждения ложны» - точно ложь, так как есть хотя бы одна правда. Значит, первое утверждение жителя Б – правда. Столица острова называется Наири.
Заметим, что житель А оба раза солгал, что не противоречит полученному решению.

Ответ: Наири.