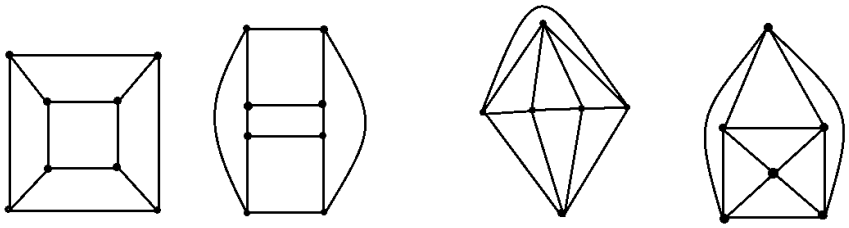
Занятие номер	Класс	Тема
23	8 профи	Планарные графы.

1. Решение.

Соответствующие плоские графы можно изобразить по-разному, например, так:



Куб **Октаэдр**

Ответ: являются, см. решение.

2. Решение.

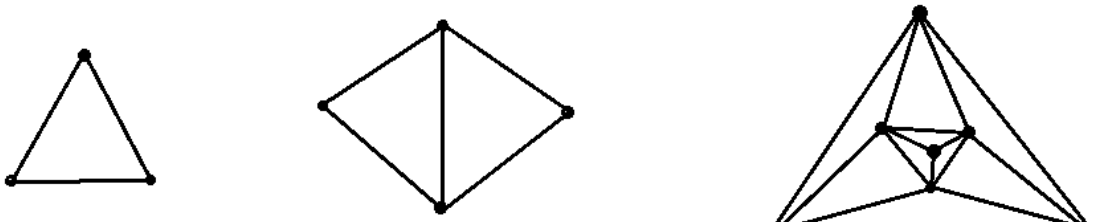
Согласно теореме (см. теорию), для плоского графа при $Г \geq 2$ верно неравенство $3Г \leq 2Р$.

Если $Г = 2$, то $2Р \geq 3*2 = 6$, значит, $Р \geq 3$. Наименьшее количество рёбер в таком графе равно 3.

Если $Г = 3$, то $2Р \geq 3*3 = 9$, значит, $Р \geq 5$ ($Р \geq 4{,}5$, но Р не может быть дробным числом, значит, $Р \geq 5$). Наименьшее количество рёбер в таком графе равно 5.

Если $Г = 10$, то $2Р \geq 3*10 = 30$, значит, $Р \geq 15$. Наименьшее количество рёбер в таком графе равно 15.

Соответствующие примеры графов:



Г=2, Р=3 **Г=3, Р=5** **Г=10, Р=15**

Ответ: а) 3 ребра; б) 5 рёбер; в) 15 рёбер.

3. Решение.

В этой задаче подразумевается, что каждая ячейка – это многоугольник, а палочки, образующие ячейку не пересекаются, а только соединяются друг с другом концами. Из этого следует, что колония муравьев – это плоский граф, где вершины – это точки соединения палочек, а ребра – это палочки.

Согласно формуле Эйлера, $В – Р + Г = 2$. В этой задаче $Р=58$, $В=30$. Значит, $Г = Р – В + 2 = 58–30+2 = 30$. Каждая грань графа, кроме одной (внешней), – это и есть одна муравьиная ячейка. Значит, в этой колонии всего $30 – 1 = 29$ ячеек, то есть 29 муравьев.

Ответ: 29 муравьев.

4. Доказательство.

Используем формулу Эйлера (для связного плоского графа верно равенство $В – Р + Г = 2$), теорему из теории (для плоского графа при $Г \geq 2$ верно неравенство $3Г \leq 2Р$) и свойства неравенств.

Из формулы Эйлера $Р = В + Г – 2$. Умножим обе части этого равенства на 3, получим: $3Р = 3В + 3Г – 6$. По указанной выше теореме, $3Г \leq 2Р$. Значит, $3Р = 3В + 3Г – 6 \leq 3В + 2Р – 6$, то есть $3Р \leq 3В + 2Р – 6$.

Вычтем из обеих частей последнего неравенства 2Р, получим: $Р \leq 3В – 6$. Что и требовалось доказать.

Доказано.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

Неравенство, связывающее число вершин и число ребер планарного графа, является очень важным. С помощью него можно доказывать то, что те или иные графы не являются планарными.

5. Доказательство.

В полном графе на 12 вершинах всего 12*11:2=66 ребер.

При раскрашивании ребер этого графа в два цвета найдется не менее 33 ребер одного цвета (иначе, если ребер каждого цвета менее 33, то всего в этом графе не более 32*2=64 ребер). Рассмотрим граф, составленный из ребер этого цвета.

Если этот граф является плоским, то для него выполняется неравенство $Р \leq 3В - 6$. Т. к. В=12, то $3*В - 6 = 30$. Т. к. $Р \geq 33$, а $3*В - 6 = 30$, то неравенство $Р \leq 3В - 6$ не выполняется, значит, граф плоским быть не может. Что и требовалось доказать.

Доказано.

6. Доказательство.

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов. Значит, если граф двудольный, то каждая грань ограничена не менее чем 4 ребрами. А так как каждое ребро является общим ровно для 2 граней, то граней не более чем Р*2/4. Отсюда для двудольного графа получаем , что $4Г \leq 2Р$, или $2Г \leq Р$ (вместо общего для всех плоских графов неравенства $3Г \leq 2Р$).

Используем формулу Эйлера (для связного плоского графа верно равенство $В - Р + Г = 2$), полученное неравенство для двудольного графа $2Г \leq Р$) и свойства неравенств.

Из формулы Эйлера $Р = В + Г - 2$. Умножим обе части этого равенства на 2, получим: $2Р = 2В + 2Г - 4$. Так как, $2Г \leq Р$, то $2Р = 2В + 2Г - 4 \leq 2В + Р - 4$, то есть $2Р \leq 2В + Р - 4$.

Вычтем из обеих частей последнего неравенства Р, получим: $Р \leq 2В - 4$. Что и требовалось доказать.

Доказано.

7. Решени.

Из формулы Эйлера количество граней для каждой из компонент связности равно $Г_i = Р_i - В_i + 2$.

Рассмотрим сначала одну компоненту связности, для нее $Г_1 = Р_1 - В_1 + 2$. Заметим, что каждая следующая компонента связности полностью лежит в одной из граней уже рассмотренных компонент (эта грань является внешней гранью для этой следующей компоненты). Таким образом, при добавлении следующей компоненты связности количество граней увеличивается на $Г_i = Р_i - В_i + 1$ (на количество внутренних граней добавляемой компоненты связности, без внешней грани).

В итоге, когда будут добавлены все k компонент связности, количество граней станет равно Р (все ребра) – В (все вершины) + 2 (число из первой компоненты) + (k–1)*1 (число из всех следующих компонент. То есть для всего графа $Г = Р - В + k + 1$. Тогда $В - Р + Г = k+1$.

Ответ: $В - Р + Г = k+1$.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.