Занятие номер	Класс	Тема
19	7 база	Шары и перегородки.

1. Решение.

Разложим все монеты в ряд и представим, что они лежат в одном большом кармане. Теперь, поставив между какими-нибудь двумя монетами перегородку, мы получим два кармана, по которым распределены монеты. Перегородку можно поставить в любом промежутке между монетами. Кроме того, перегородку можно поставить перед первой монетой или после последней. Тогда в одном из карманов монет не будет.

Таким образом, количество способов разложить монеты по двум карманам равно количеству способов поставить перегородку и разделить один карман на два кармана. Монет всего 9, между ними 8 промежутков, куда можно поставить перегородку. Кроме того, перегородку можно поставить перед первой монетой или после последней. Всего есть 8+1+1=10 способов поставить перегородку.

Ответ: 10 способов.

2. Решение.

Расставить 25 семиклассников в очередь можно 25! способами. Промежутков между семиклассниками 24. Значит, после того, как семиклассники расставлены, для первого преподавателя место можно выбрать 24 способами, после этого для второго преподавателя – 23 способами (так как в каждом промежутке не более 1 преподавателя), после этого для третьего преподавателя – 22 способами. Всего можно получить 25!*(24*23*22) вариантов очередей.

Ответ: 25!*(24*23*22).

3. Решение.

Если расставить львов в ряд, то тигров можно поставить в промежутки между ними, а также в начало ряда и в конец ряда. При этом тигры не должны стоять рядом друг с другом. Значит, всего есть 6 мест в ряду для тигров.

а) Неразличимых львов можно поставить в ряд 1 способом. После этого выбрать места в ряду для неразличимых тигров можно 6*5*4*3:4!=C_6^4=15 способами. Всего есть 1*15=15 способов расставить зверей в ряд.

б) Различимых львов можно поставить в ряд 5!=120 способами. После этого выбрать места в ряду для различимых тигров можно 6*5*4*3=A_6^4=360 способами. Всего есть 120*360=43200 способов расставить зверей в ряд.

Ответ: а) 15, б) 43200.

4. Решение.

а) Между 30 листами в книге есть всего 29 промежутков. Место для первой закладки можно выбрать 29 способами, после этого для второй закладки – 28 способами (так как закладки не могут лежать рядом), для третьей закладки – 27 способами, для четвертой – 26, для пятой – 25. Всего есть A_{29}^5=29*28*27*26*25=29!:24! способов положить 5 разных закладок.

б) Если все закладки одинаковые, то порядок в выбранной пятерке промежутков не важен, поэтому положить 5 одинаковых закладок можно C_{29}^5=29*28*27*26*25:5!=29!:24!:5! способами.

Ответ: а) A_{29}^5=29*28*27*26*25=29!:24!, б) C_{29}^5=29*28*27*26*25:5!=29!:24!:5!.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

5. **Решение.**

Количество способов разложить 30 одинаковых шаров в 6 разных ящиков, чтобы пустых ящиков не было, равно количеству способов установить 5 перегородок в ряду из 30 шаров так, чтобы в каждом промежутке стояло не более 1 перегородки. Промежутков всего 29, выбрать пять из них для установки перегородок можно C_{29}^{5}=29*28*27*26*25:5!= 29!:24!:5!.

Ответ: C_{29}^{5}=29*28*27*26*25:5!= 29!:24!:5!.

6. **Решение.**

Пусть конфеты – это шары, а дети – это ящики. Ящики не должны быть пустыми. Количество способов разложить 100 одинаковых шаров в 5 разных ящиков, чтобы пустых ящиков не было, равно количеству способов установить 4 перегородки в ряду из 100 шаров так, чтобы в каждом промежутке стояло не более 1 перегородки. Промежутков всего 99, выбрать четыре из них для установки перегородок можно C_{99}^{4}=99*98*97*96:4!= 99!:95!:4!.

Ответ: C_{99}^{4}=99*98*97*96:4!= 99!:95!:4!.

7. **Решение.**

Выберем из 30+5=35 мест в слове 5 мест для букв I. Это можно сделать C_{35}^{5} = 35*34*33*32*31:5! = 35!:30!:5! способами. После этого места для букв О определяются однозначно.

Заметим, что если буквы О – это шары, а буквы I – это перегородки, то количество различных слов равно количеству способов установить 5 перегородок в ряду из 30 шаров так, что перегородки могут стоять рядом друг с другом и в начале и в конце ряда.

Ответ: C_{35}^{5}=35*34*33*32*31:5!=35!:30!:5!.

8. **Решение.**

Количество способов разложить 30 одинаковых шаров в 6 разных ящиков, если некоторые из ящиков могут быть пустыми, равно количеству способов установить 5 перегородок в ряду из 30 шаров так, что перегородки могут стоять рядом друг с другом и в начале и в конце ряда.

Фактически нужно выбрать в ряду из 35 элементов (30 шаров и 5 перегородок) 5 мест для перегородок, после этого положение шаров определяется однозначно. Это можно сделать C_{35}^{5}=35*34*33*32*31:5!=35!:30!:5!.

Ответ: C_{35}^{5}=35*34*33*32*31:5!=35!:30!:5!.

9. **Решение.**

Пусть есть 10 неразличимых пирожных и 4 разные коробки. Распределим пирожные по коробкам. Попавшие в первую коробку пирожные будут эклерами, во вторую – песочными, в третью – бисквитными, в четвертую – слоеными. При этом некоторые коробки могут быть пустыми.

Количество способов разложить 10 одинаковых пирожных в 4 разных коробки, если некоторые из коробок могут быть пустыми, равно количеству способов установить 3 перегородки в ряду из 10 пирожных так, что перегородки могут стоять рядом друг с другом и в начале и в конце ряда.

Фактически нужно выбрать в ряду из 13 элементов (10 пирожных и 3 перегородки) 3 места для перегородок, после этого положение пирожных определяется однозначно. Это можно сделать C_{13}^{3}=13*12*11:3!=13!:10!:3!.

Ответ: C_{13}^{3}=13*12*11:3!=13!:10!:3!.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

10. Решение.

Пусть есть три разных коробки. Разложим книги по коробкам. Те, что попадут в первую коробку, переплетем в красный переплет, те, что попадут во вторую, - в синий, те, что попадут в третью, - в зеленый.

а) Коробки не должны быть пустыми.

Количество способов разложить 12 одинаковых книг в 3 разных коробки, если пустых коробок быть не должно, равно количеству способов установить 2 перегородки в ряду из 12 книг так, что перегородки не могут стоять рядом друг с другом и в начале и в конце ряда. Промежутков между книгами в ряду всего 11. Значит, установить перегородки можно C_{11}^2=11*10:2!=55 способами.

б) Коробки могут быть пустыми.

Количество способов разложить 12 одинаковых книг в 3 разных коробки, если некоторые из коробок могут быть пустыми, равно количеству способов установить 2 перегородки в ряду из 12 книг так, что перегородки могут стоять рядом друг с другом и в начале и в конце ряда. Фактически нужно выбрать в ряду из 14 элементов (12 книг и 2 перегородки) 2 места для перегородок, после этого положение книг определяется однозначно. Это можно сделать C_{14}^2=14*13:2!=91 способом.

б) Во второй коробке должна быть хотя бы одна книга. Значит, отложим одну книгу, которая точно будет в синем переплете, и посчитаем, сколькими способами можно разложить оставшиеся 11 книг в 3 коробки.

Количество способов разложить 11 одинаковых книг в 3 разных коробки, если некоторые из коробок могут быть пустыми, равно количеству способов установить 2 перегородки в ряду из 11 книг так, что перегородки могут стоять рядом друг с другом и в начале и в конце ряда. Это можно сделать C_{13}^2=13*12:2!=78 способами.

Ответ: а) 55, б) 91, в) 78.

11. Решение.

Пусть есть n единиц и k разных коробок. Разложим единицы по коробкам. Те, что попадут в первую коробку, в сумме составят x_1, те, что попадут во вторую, - в сумме составят x_2, … те, что попадут в k-ю, - в сумме составят x_k.

а) Если все неизвестные числа должны быть натуральными, то есть ≥1, то коробки не должны быть пустыми.

Количество способов разложить n одинаковых единиц в k разных коробок, если пустых коробок быть не должно, равно C_{n-1}^{k-1}=(n-1)!:(n-k)!:(k-1)!.

б) Если все неизвестные числа должны быть целые неотрицательные, то есть ≥0, то коробки могут быть пустыми.

Количество способов разложить n одинаковых единиц в k разных коробок, если могут быть пустые коробки, равно C_{n+k-1}^{k-1}=(n+k-1)!:n!:(k-1)!.

Ответ: а) C_{n-1}^{k-1}=(n-1)!:(n-k)!:(k-1)!, б) C_{n+k-1}^{k-1}=(n+k-1)!:n!:(k-1)!.

12. Решение.

а) Разложим сначала 30 красных шаров по 6 ящикам (ящики не могут быть пустыми). Это можно сделать C_{29}^5=29!:24!:5! способами. Для каждого из этих способов раскладки красных шаров 20 синих шаров разложить по 6 ящикам (ящики не могут быть пустыми) можно C_{19}^5=19!:14!:5!.

Значит, всего есть $C_{29}^5 \cdot C_{19}^5$=29!:24!:5!· 19!:14!:5! способов разложить шары указанным образом.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

б) Разложим сначала 30 красных шаров по 6 ящикам (ящики могут быть пустыми). Это можно сделать C_{35}^{5}=35!:30!:5! способами. Для каждого из этих способов раскладки красных шаров 20 синих шаров разложить по 6 ящикам (ящики могут быть пустыми) можно C_{25}^{5}=25!:20!:5!.

Значит, всего есть $C_{35}^{5} \cdot C_{25}^{5}$=35!:30!:5!*25!:20!:5! способов разложить шары указанным образом.

Ответ: а) $C_{29}^{5} \cdot C_{19}^{5}$=29!:24!:5!$\cdot$ 19!:14!:5!, б) $C_{35}^{5} \cdot C_{25}^{5}$=35!:30!:5!*25!:20!:5!.

Домашнее задание 19.

Решение.

Расположить 25 человек в алфавитном порядке можно единственным способом. После этого поставим в промежутках в списке между фамилиями 3 перегородки, которые разобьют список на 4 группы. Так как в каждой группе должен быть хоты бы 1 человек, то перегородки не могут стоять рядом друг с другом и в начале и в конце списка.

Промежутков между фамилиями в списке всего 24. Выбрать среди них три промежутка для установки перегородок можно C_{24}^{3}=24!:21!:3! способами. Это и будет количеством способов распределения семиклассников на команды.

Ответ: C_{24}^{3}=24!:21!:3!.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.