Занятие номер	Класс	Тема
19	7 профи	Индукция неравенства.

1. Доказательство.

База индукции:

При n=4 получим:

$4! > 2^4$

$24 > 16$

Верно.

Индукционный переход:

Предположим, что при n=k неравенство верно: $k!>2^k$. (1)

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Умножим обе части неравенства (1) на (k+1), получим: $k!\cdot (k+1)>2^k\cdot (k+1)$, или $(k+1)!> 2^k\cdot (k+1)$.

Так как при $k\geq 4$ $k+1>2$, то $\mathbf{(k+1)!}>2^k\cdot (k+1)>2^k\cdot 2=\mathbf{2^{k+1}}$. Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, $n!>2^n$ при всех натуральных $n\geq 4$.

Доказано.

2. Доказательство.

База индукции:

При n=3 получим:

$2^3 > 2\cdot 3+1$

$8 > 7$

Верно.

Индукционный переход:

Предположим, что при n=k неравенство верно: $2^k > 2k+1$. (1)

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Умножим обе части неравенства (1) на 2, получим: $2^k\cdot 2 > 2\cdot (2k+1)$, или $2^{k+1} > 4k+2 = 2\cdot (k+1)+2k$.

Так как при $k>2$ $2k>1$, то $\mathbf{2^{k+1}} > 2\cdot (k+1)+2k > \mathbf{2\cdot (k+1)+1}$. Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, $2^n>2n+1$ при всех натуральных $n>2$.

Доказано.

3. Доказательство.

База индукции:

ООО "НТЛ "2x2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

При n=1 получим:

$4^1 > 7 \cdot 1 - 5$

$4 > 2$

Верно.

Индукционный переход:

Предположим, что при n=k неравенство верно: $4^k > 7k-5$. (1)

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Умножим обе части неравенства (1) на 4, получим: $4^k \cdot 4 > 4 \cdot (7k-5)$, или $4^{k+1} > 7 \cdot (k+1) + 3 \cdot 7k - 27 = 7 \cdot (k+1) + 3 \cdot 7k - 22 - 5$.

Так как при $k \geq 2$ (а при k=1 неравенство верно, см. базу индукции) $3 \cdot 7k - 22 > 0$, то $4^{k+1} > 7 \cdot (k+1) + 3 \cdot 7k - 22 - 5 > 7 \cdot (k+1) - 5$. Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, $4^n > 7n - 5$ при всех натуральных n.

Доказано.

4. Доказательство.

База индукции:

При n=2 получим:

$3^2 - 2^2 > 2$

$5 > 2$

Верно.

Индукционный переход:

Предположим, что при n=k неравенство верно: $3^k - 2^k > k$.

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Рассмотрим выражение $3^{k+1}-2^{k+1}$ и оценим его:

$3^{k+1}-2^{k+1} = 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k > 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k = 2 \cdot (3^k-2^k)$.

По предположению индукции, $3^k - 2^k > k$, поэтому:

$\mathbf{3^{k+1}-2^{k+1}} = 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k > 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k = 2 \cdot (3^k-2^k) > 2 \cdot k = k+k > \mathbf{k+1}$. Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, $3^n - 2^n > n$ при всех натуральных n.

Доказано.

5. Решение.

При n=1 неравенство не выполняется: $3^{1-1} > 2 \cdot 1^2 - 1$, или $1 > 1$ – неверно.

При n=2 неравенство не выполняется: $3^{2-1} > 2 \cdot 2^2 - 2$, или $3 > 6$ – неверно.

При n=3 неравенство не выполняется: $3^{3-1} > 2 \cdot 3^2 - 3$, или $9 > 15$ – неверно.

ООО "НТЛ "2x2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

При n=4 неравенство не выполняется: $3^{4-1} > 2\cdot 4^2 - 4$, или $27 > 28$ – неверно.

Докажем, что неравенство выполняется при всех натуральных $n\geq 5$.

База индукции:

При n=5 получим:

$3^{5-1} > 2\cdot 5^2 - 5$

$81 > 45$

Верно.

Индукционный переход:

Предположим, что при n=k неравенство верно: $3^{k-1} > 2\cdot k^2 - k$. (1)

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Умножим обе части неравенства (1) на 3, получим:

$3^{k-1}\cdot 3 > 3\cdot 2\cdot k^2 - 3\cdot k$, или $3^{(k+1)-1} > 3\cdot 2\cdot k^2 - 3\cdot k$.

Преобразуем правую часть неравенства:

$3^{(k+1)-1} > 6k^2 - 3k = 2k^2+4k^2+4k-7k+2-2 = 2\cdot (k^2+2k+1)+4k^2-7k-5 = 2\cdot (k+1)^2+4k^2-7k-5 = 2\cdot (k+1)^2-k-1+4k^2-6k-4 = 2\cdot (k+1)^2-(k+1)+4k^2-6k-4 = 2\cdot (k+1)^2-(k+1)+4k^2-8k+2k-4 = 2\cdot (k+1)^2-(k+1)+4k(k-2)+2(k-2) = 2\cdot (k+1)^2-(k+1)+(k-2)(4k+2)$.

Так как $(k-2)(4k+2)>0$ при $k\geq 5$, то $\mathbf{3^{(k+1)-1} > 2\cdot (k+1)^2-(k+1)+(k-2)(4k+2) > 2\cdot (k+1)^2-(k+1)}$.

Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, $3^{n-1} > 2\cdot n^2 - n$ при всех натуральных $n\geq 5$.

Ответ: при $n\geq 5$.

6. Доказательство.

База индукции:

При n=1 получим:

$\frac{(2\cdot 1)^2}{(2\cdot 1-1)^2} \geq 2\cdot 1+1$, или $\frac{4}{1} \geq 3$. Верно.

Индукционный переход:

Предположим, что при n=k неравенство верно: $\frac{4\cdot 16\cdot 36\cdot \ldots\cdot (2\cdot k)^2}{1\cdot 9\cdot 25\cdot \ldots\cdot (2k-1)^2} \geq 2k+1$. (1)

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Умножим обе части неравенства (1) на $\frac{(2(k+1))^2}{(2(k+1)-1)^2}$, получим:

$\frac{4\cdot 16\cdot 36\cdot \ldots\cdot (2\cdot k)^2}{1\cdot 9\cdot 25\cdot \ldots\cdot (2k-1)^2}\cdot \frac{(2(k+1))^2}{(2(k+1)-1)^2} \geq (2k+1)\cdot \frac{(2(k+1))^2}{(2(k+1)-1)^2}$.

Преобразуем и оценим правую часть полученного неравенства:

ООО "НТЛ "2x2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

$\frac{\mathbf{4\cdot16\cdot36\cdot\ldots\cdot(2\cdot k)^2\cdot(2(k+1))^2}}{\mathbf{1\cdot9\cdot25\cdot\ldots\cdot(2k-1)^2\cdot(2(k+1)-1)^2}} \geq (2k+1)\cdot\frac{(2(k+1))^2}{(2(k+1)-1)^2} = \frac{(2k+1)(2(k+1))^2}{(2(k+1)-1)^2} = \frac{(2k+1)(2(k+1))^2}{(2k+2-1)^2} = \frac{(2k+1)(2(k+1))^2}{(2k+1)^2} = \frac{(2(k+1))^2}{2k+1} = \frac{(2k+2)^2}{2k+1} = \frac{4k^2+8k+4}{2k+1} = \frac{(4k^2+4k+1)+(4k+2)+1}{2k+1} = \frac{(2k+1)^2+2(2k+1)+1}{2k+1} > \frac{(2k+1)^2+2(2k+1)}{2k+1} = (2k+1)+2 = 2k+3 = \mathbf{2(k+1)+1}.$

Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, неравенство верно при всех натуральных n.

Доказано.

7. Доказательство.

База индукции:

При n=2 получим:

$(1+x)^2 > 1+2x$

$1+2x+x^2 > 1+2x$

Так как $x^2>0$ при $x\neq0$, то последнее неравенство верно.

Индукционный переход:

Предположим, что при n=k неравенство верно: $(1+x)^k > 1+kx$. (1)

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Так как $x>-1$, то $1+x>0$. Умножим обе части неравенства на положительное (1+x), неравенство сохранится:

$(1+x)^k\cdot(1+x) > (1+kx)(1+x)$.

Преобразуем правую часть полученного неравенства:

$(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2$.

Так как $kx^2>0$ при $x\neq0$ и натуральном k, то $\mathbf{(1+x)^{k+1}} > 1+(k+1)x+kx^2 > \mathbf{1+(k+1)x}$.

Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, $(1+x)^n > 1+nx$ при всех натуральных n и действительных $x > -1$, $x\neq0$.

Доказано.

8. Доказательство.

База индукции:

При n=1 получим:

$(1+a_1) \geq 1+a_1$

Верно.

Индукционный переход:

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

Предположим, что при n=k неравенство верно: $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k) \geq 1+a_1+a_1+\ldots+a_k$. (1)

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Так как $a_{k+1}>-1$, то $1+a_{k+1}>0$. Умножим обе части неравенства на положительное $(1+a_{k+1})$, неравенство сохранится:

$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq (1+a_1+a_1+\ldots+a_k)(1+a_{k+1})$.

Преобразуем правую часть полученного неравенства:

$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+a_1a_{k+1}+ a_2a_{k+1}+\ldots+ a_ka_{k+1}$.

Так как все числа a_i одного знака, то все произведения $a_ia_{k+1}\geq 0$, значит, и сумма $a_1a_{k+1}+ a_2a_{k+1}+\ldots+ a_ka_{k+1}\geq 0$.

Тогда $\mathbf{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1})} \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+a_1a_{k+1}+ a_2a_{k+1}+\ldots+ a_ka_{k+1} \geq \mathbf{1+a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}}$.

Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, неравенство верно при всех натуральных n и действительных a_i одного знака и $a_i > -1$.

Доказано.

9. Доказательство.

База индукции:

При n=3 получим:

$\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3+2}+\frac{1}{3+3}>\frac{13}{24}$, или $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}>\frac{13}{24}$, или $\frac{30}{120}+\frac{24}{120}+\frac{20}{120}>\frac{65}{120}$, или $\frac{74}{120}>\frac{65}{120}$.

Верно.

Индукционный переход:

Предположим, что при n=k неравенство верно: $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{24}$. (1)

Докажем, что тогда оно верно и при n=k+1.

Рассмотрим выражение $\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}$ и оценим его:

$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k+k+2}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{k+k+1}+\frac{1}{k+k+2}=(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k+k})-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+k+1}+\frac{1}{k+k+2}$

По предположению индукции, $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{24}$.

Рассмотрим и преобразуем выражение:

$-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+k+1}+\frac{1}{k+k+2}=-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{2}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1-2}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{2k+2-2k-1}{2(2k+1)(k+1)}=\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}>0$ при всех натуральных k.

Учитывая это, получаем:

ООО "НТЛ "2x2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})+\mathbf{1}}+\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})+\mathbf{2}}+\cdots+\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})+(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k+k}\right)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+k+1}+\frac{1}{k+k+2}>\frac{13}{24}+0=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{24}}$.

Что и требовалось доказать.

Значит, по методу математической индукции, $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ при всех натуральных n.

Доказано.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.