

Занятие номер	Класс	Тема
23	6 база	Движение по кругу.

1. Решение.

1 способ.

Скорость Миши в 10 раз больше скорости Саши. За то время, что Миша пробежит 1 круг, Саша пробежит только $1/10$ круга, за то время, что Миша пробежит 2 круга, Саша пробежит $2/10$ круга, и т. д.

Таким образом, Миша обгонит Саша между $1/10$ и $2/10$ круга, между $2/10$ и $3/10$ круга, ..., между $8/10$ и $9/10$ круга, после этого Миша и Саша вместе финишируют, завершив 10-й и 1-й круг соответственно. То есть Миша обгонит Сашу после 1-го, после 2-го, ..., после 8-го круга – всего 8 раз.

2 способ.

Представим, что Саша стоит неподвижно на карусели, вращающейся в сторону движения мальчиков со скоростью Саши, а Миша бежит по краю этой карусели. Чтобы к моменту, когда Саша на карусели сделает 1 круг, Миша сделал 10 кругов, нужно, чтобы Миша пробежал 9 кругов, и еще 1 круг он сделает вместе с каруселью.

Таким образом, Саша стоит неподвижно, а Миша бежит 9 кругов, поэтому он пробежит мимо Саши после 1-го круга, после 2-го, ..., после 8-го круга, а после 9 круга обгона не случится, Миша остановится рядом с Сашей. Значит, Миша обгонит Сашу 8 раз.

Ответ: 8 раз.

2. Решение.

Пока Миша пробегает 1 часть круга, Саша пробегает 4 части. Если круг разделить на 5 равных частей, начиная от места старта, то они встретятся, когда Миша пробежит $1/5$ круга, а Саша – $4/5$ круга в противоположном направлении. И это случится через $10:5*4=8$ минут.

Если ребята бегут в одном направлении, то их встреча произойдет, когда Миша пробежит $1/3$ круга, а Саша – $4/3$ круга, то есть круг и еще $1/3$ круга. Это случится через $10:3*4=13\frac{1}{3}$ минут = 13 минут 20 секунд.

Ответ: через 8 минут, через 13 минут 20 секунд.

3. Решение.

Пусть V – скорость сына, а xV – скорость отца, где x – во сколько раз скорость отца больше скорости сына.

1 способ.

Пусть S – длина окружности катка, t – время между встречами во втором случае, $5t$ – время между встречами в первом случае.

В первом случае, когда отец и сын катаются в одном направлении, к моменту встречи отец проезжает на 1 круг больше, чем сын, с момента предыдущей встречи, то есть:

$$xV*5t = V*5t + S, \text{ откуда } S = 5Vt(x-1).$$

Во втором случае, когда отец и сын катаются в разных направлениях, к моменту встречи они в сумме проедут 1 круг с момента предыдущей встречи, то есть:

$$V*t + xV*t = S, \text{ или } S = Vt(1+x).$$

Из двух полученных равенств делаем вывод, что $5(x-1)=(1+x)$, или $5x-5=1+x$, или $4x=6$.

Откуда $x=6:4=3/2=1,5$.

2 способ.

Так как после перемены направления отец и сын стали встречаться в 5 раз чаще, то это значит, что они стали сближаться после предыдущей встречи за в 5 раз меньшее время. То есть скорость сближения увеличилась в 5 раз.

До перемены направления скорость сближения отца и сына была равна $xV-V$, после перемены направления стала равна $xV+V$.

Получаем, что $5*(xV-V)=xV+V$, или $5xV-5V=xV+V$, или $5x-5=x+1$, откуда $x=6:4=1,5$.

Ответ: в 1,5 раза.

4. Решение.

Пусть x – скорость второго автомобиля.

25 минут = $5/12$ часа.

1 способ.

По условию задачи, $112*5:12 = x*5:12 + 25$.

Умножим обе части равенства на 12, получим:

$112*5 = 5x + 25*12$, или $560=5x+300$, откуда $x=(560-300):5=52$ км/ч.

2 способ.

Так как автомобили движутся в одном направлении, то их скорость сближения/удаления равна $112-x$ км/ч.

За $5/12$ часа они удалились друг от друга на 1 круг, то есть на 25 км. Значит, с другой стороны, скорость удаления автомобилей равна $25:5*12=60$ км/ч.

Тогда $112-x=60$, откуда $x=112-60=52$ км/ч.

Ответ: 52 км/ч.

5. Решение.

Так как первый раз мотоциклист догнал велосипедиста через $30+10=40$ минут после выезда велосипедиста, то за 10 минут мотоциклист проехал столько же, сколько велосипедист – за 40 минут. То есть скорость мотоциклиста в 4 раза больше скорости велосипедиста.

Так как мотоциклист второй раз догнал велосипедиста еще через 30 минут, то за 30 минут он проехал целый круг в 30 км и еще расстояние, которое проехал велосипедист за 30 минут (а мотоциклист проехал бы за $30:4=7,5$ минут).

Пусть скорость мотоциклиста x км/ч. Тогда вышесказанное можно записать так:

$$\frac{1}{2}*x = 30 + \frac{1}{2}*x:4.$$

Умножим обе части равенства на 8, получим:

$4x=240+x$, или $3x=240$, откуда $x=240:3=80$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

6. Решение.

Скорость сближения/удаления первого и второго спортсмена равна $15-12=3$ км/ч, второго и третьего – $17-15=2$ км/ч. За 1 час второй спортсмен обгоняет первого на 3000 м, значит, за минуту – на 50 м. Таким

образом, второй спортсмен обгоняет первого на круг (и встречается с ним) каждые $400:50=8$ минут. Аналогично выясняем, что третий спортсмен обгоняет второго на круг каждые 12 минут. То есть каждые 24 минуты происходит встреча всех трёх спортсменов.

Ответ: через 24 минуты.

7. Решение.

К тому моменту, когда первый проедет 5 кругов, второй проедет 4 круга (так как его скорость составляет $\frac{4}{5}$ скорости первого), третий – 3 круга, четвертый – 2 круга, пятый – 1 круг. И все пятеро окажутся в одной точке. В этой точке первый обгонит второго 1-й раз, третьего – 2-й раз, четвертого – 3-й раз, пятого – 4-й раз, то есть насчитается $1+2+3+4=10$ обогнанных велосипедистов. Такая же ситуация повторится еще после пяти кругов, пройденных первым. Все пятеро снова окажутся в одной точке, и в ней первый насчитает всего 20 обогнанных велосипедистов. Далее 21-м он обгонит самого медленного, то есть пятого.

Ответ: 5-го.

8. Решение.

Пусть V – скорость Нины, а xV – скорость Васи, где x – во сколько раз скорость Васи больше скорости Нины.

1 способ.

Пусть t – время, за которое Вася пробегает круг (время между двумя соседними пересечениями старта), тогда $3t$ – время между двумя соседними обгонами Нины.

К моменту очередного обгона Вася пробегает на 1 круг больше, чем Нина, с момента предыдущего обгона. Значит, $xV*3t - V*3t$ – это 1 круг. С другой стороны, 1 круг – это $xV*t$. Таким образом, получаем:
 $xV*3t - V*3t = xV*t$.

Разделим обе части равенства на Vt , получим:

$$3x - 3 = x, \text{ откуда } 2x = 3, x = 2/3=1,5.$$

То есть скорость Васи в 1,5 раза больше скорости Нины.

2 способ.

Так как Вася линию старта пересекает в 3 раза чаще, чем обгоняет Нино, то скорость Васи в 3 раза больше скорости сближения с Ниной. То есть $xV=3*(xV-V)$, или $x=3x-3$, откуда $x=3:2=1,5$.

Ответ: в 1,5 раза.

9. Решение.

Разделим круг на 12 равных частей. Тогда скорость первого – $12:6=2$ части в минуту, скорость второго – $12:4=3$ части в минуту.

За 3 минуты первый удалится от второго на $2*3=6$ частей.

Скорость сближения велосипедистов – $3-2=1$ часть в минуту. Сблизиться им нужно на 6 частей. Второй догонит первого через $6:1=6$ минут после выезда.

Ответ: через 6 минут.

10. Решение.

Скорость минутной стрелки – 1 оборот за 60 минут, скорость часовой – $\frac{1}{12}$ оборота за 60 минут. Скорость сближения – $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ оборота в час.

Нужно сблизиться на $\frac{1}{4}$ оборота. Это произойдет через $\frac{1}{4} : (\frac{11}{12}) = \frac{3}{11}$ часа.

Во второй раз стрелки встретятся между 4 и 5 часами, в третий – между 5 и 6 часами, в четвертый – между 6 и 7 часами, в пятый – между 7 и 8 часами. С 3 до 7 часов пройдет 4 часа. Посмотрим, через сколько времени после 7 часов встретятся стрелки.

Сблизиться им надо на $\frac{7}{12}$ оборота, это произойдет через $\frac{7}{12} : (\frac{11}{12}) = \frac{7}{11}$ часа. А с 3 часов пройдет $4\frac{7}{11}$ часа.

Ответ: через $\frac{3}{11}$ часа, $4\frac{7}{11}$ часа.

11. Решение.

За сутки часовая сделает 2 оборота, минутная – 24 оборота. Минутная обгонит часовую между 1 и 2 часами, 2 и 3, ... 9 и 10, 10 и 11, ровно в 12, между 13 и 14, 14 и 15, ... 21 и 22, 22 и 23, ровно в 24. Всего 22 обгона.

Ответ: 22 раза.

12. Решение.

Положение минутной стрелки совпадает с правильным ее положением в 0 минут и в 30 минут. Значит, часы будут показывать верное время каждые полчаса: в 9:00, 9:30, 10:00, 10:30, ... 17:30, 18:00 – всего 19 раз.

Ответ: 19 раз.

Домашнее задание 23.

Решение.

Скорость сближения мотоциклистов – 15 км/ч.

Сблизиться им нужно на половину круга, то есть на 9,5 км.

Это произойдет через $9,5 : 15 = \frac{19}{30}$ часа, то есть через 38 минут.

Ответ: через 38 минут.