Занятие номер	Класс	Тема
19	5 профи	Комбинаторика. Часть 2.

1. **Решение.**

Лошадку для Тани можно выбрать 8 способами (любую из 8 лошадок). Для каждого варианта Таниной лошадки лошадку для Вани можно выбрать 7 способами (любую из 7 оставшихся). Всего есть 8*7=56 способов выбрать упорядоченную пару лошадок (одну для Тани, вторую для Вани).

Ответ: 8*7=56 способами.

2. **Решение.**

Первую порцию мороженого Петя может выбрать 8 способами, для каждого из этих способов вторую порцию можно выбрать 7 способами. Всего есть 8*7=56 способов выбрать упорядоченную пару порций разных видов. Но так как для Пети порядок порций в паре не важен, то, чтобы исключить повторяющиеся пары, нужно 56 разделить на 2 (количество способов упорядочить две разные порции). Таким образом, всего есть 8*7:2=28 способов выбрать неупорядоченную порций мороженого разных видов.

Ответ: 8*7:2=28 способами.

3. Решение.

а) На должность директора человека можно выбрать 11 способами, после этого на должность заместителя – 10 способами, после этого на должность секретаря – 9 способами. Всего есть 11*10*9=990 способов выбрать упорядоченную тройку людей из 11 кандидатов.

б) Первого помощника секретаря можно выбрать 11 способами, после этого второго – 10 способами, после этого третьего – 9 способами. Всего есть 11*10*9=990 способов выбрать упорядоченную тройку людей из 11 кандидатов. Но так как должности этих трех людей одинаковы, то порядок людей в этой тройке не важен. Поэтому, чтобы исключить повторяющиеся варианты троек, нужно 990 способов разделить на количество способов упорядочить трех людей. Всего есть 990:3!=990:6=165 способов выбрать неупорядоченную тройку людей из 11 кандидатов.

Ответ: а) 11*10*9=990, б) 11*10*9:(3*2*1)=165.

4. **Решение.**

Первую задачу можно выбрать 30 способами, после этого вторую – 29 способами, после этого третью – 28 способами, после этого четвертую – 27 способами, после этого пятую – 26 способами. Так как порядок задач в выбранной пятерке не важен, то всего есть 30*29*28*27*26:5! способов выбрать 5 задач из 30.

Ответ: 30*29*28*27*26:5!.

5. **Решение.**

Для черной ладьи мы можем выбрать место 64 способами.

Для белой – любую клетку из 63 оставшихся за исключением 14 клеток, которые находятся под боем черной ладьи, то есть 63-14=49 способами. Или, по-другому, место для белой ладьи можно выбрать на любой клетке из оставшихся 7 вертикалей и 7 горизонталей, то есть 7*7=49 способами.

Для синей ладьи мы можем выбрать любую клетку из 62 оставшихся за исключением тех, которые бьют черная ладья и белая ладья. Черная ладья бьет 14 клеток и белая ладья бьет 14 клеток, но две из этих клеток бьют обе ладьи (это клетки на пересечении горизонталей и вертикалей этих ладей). Значит, вместе они бьют 14+14-2=26 клеток. Значит, выбрать место для зеленой ладьи мы можем 62-26=36 способами. Или, по-другому, место для синей ладьи можно выбрать на любой клетке из оставшихся 6 вертикалей и 6 горизонталей, то есть 6*6=36 способами.

Для красной ладьи мы можем выбрать любую клетку из 61 оставшейся за исключением тех, которые бьют черная, белая и зеленая ладьи. Каждая из них бьет по 14 клеток, но 6 из этих клеток ладьи бьют попарно (это клетки на пересечении горизонталей и вертикалей этих ладей). Значит, вместе они бьют 14+14+14-6=36 клеток. Значит, выбрать место для полосатой ладьи мы можем 61-36=25 способами. Или, по-другому, место для красной ладьи можно выбрать на любой клетке из оставшихся 5 вертикалей и 5 горизонталей, то есть 5*5=25 способами.

Таким образом, расставить 4 ладьи разных цветов так, чтобы никакие две не били друг друга можно 64*49*36*25 способами.

Ответ: 64*49*36*25.

6. Решение.

1 способ.

Место для первой ладьи можно выбрать 25 способами (любую клетку доски). После этого место для второй ладьи можно выбрать 16 способами, так как ее нельзя поставить на те горизонталь и вертикаль, которые бьет первая ладья. Заметим, что оставшиеся 4 вертикали и 4 горизонтали – это 4*4=16 клеток. После этого место для третьей ладьи можно выбрать 9 способами (оставшиеся 3 вертикали и 3 горизонтали), для четвертой – 4 способами, для пятой – 1 способом. Так как все ладьи одинаковые, то всего есть 25*16*9*4*1:5!=5!=120 способов расставить 5 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга.

2 способ.

Заметим, что в этом случае в каждой горизонтали будет стоять по 1 ладье, и в каждой вертикали будет стоять по 1 ладье.

Место для ладьи в первой горизонтали можно выбрать 5 способами (любую из 5 клеток), после этого место для ладьи во второй горизонтали – 4 способами, место для ладьи в третьей горизонтали – 3 способами, и так далее. Всего есть 5!=120 способов расставить 5 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга.

Ответ: 5!=120 способами.

7. Решение.

В каждой шеренге будет по 6 человек. В первую шеренгу на первое место человека можно выбрать 12 способами, на второе – 11 способами, …, на шестое – 7 способами. Всего есть 12*11*10*9*8*7 способов выбрать и расставить людей в первую шеренгу. После этого оставшихся людей можно расставить во вторую шеренгу 6*5*4*3*2*1 способами. Так как порядок шеренг не важен, то всего есть (12*11*10*9*8*7)*(6*5*4*3*2*1):2!=12!:2 способов расставить 12 людей в 2 шеренги одинаковой длины.

Ответ: 12!:2.

8. Решение.

За каждым столом будет по 6 человек.

Считаем, что варианты размещения людей за столом, отличающиеся только поворотом вокруг стола, одинаковыми. Тогда расставим сначала 6 человек в ряд, а затем в этом порядке посадим за стол. Каждый ряд – это 6 одинаковых способов рассадки за стол (отличаются поворотом ряда вокруг стола). Значит, количество способов рассадки 6 человек за стол в 6 раз меньше количества способов расставить 6 людей в ряд.

Выбрать и расставить в ряд 6 человек для первого стола можно 12*11*10*9*8*7 способами. Значит, рассадить их за стол можно 12*11*10*9*8*7:6 способами. После этого расставить оставшихся людей в ряд можно 6*5*4*3*2*1=6! способами, а рассадить их за второй стол – 6!:6 способами. Так как порядок столов не важен, то всего есть (12*11*10*9*8*7:6)*(6!:6):2 = 12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1:6:6:2 = 12!:6:6:2 способов рассадить 12 людей за два круглых стола поровну.

Ответ: 12!:6:6:2.

9. Решение.

а) Если выбрать 6 конфет для первой девочки, то для второй оставшиеся 6 конфет определяются однозначно. Таким образом, количество способов разделить 12 конфет между двумя девочками поровну равно количеству способов выбрать 6 конфет из 12. Выбрать 6 конфет для первой девочки можно 12*11*10*9*8*7:6!=924 способами (первую конфету можно выбрать 12-ю способами, вторую 11-ю способами, …, шестую 7-ю способами, порядок конфет в шестёрке не важен).

б) Если выбрать 4 конфеты из 12 для первой девочки, затем из оставшихся 8 конфет выбрать 4 конфеты для второй девочки, то для третьей девочки оставшиеся 4 конфеты определяются однозначно. Таким образом, количество способов разделить 12 конфет между тремя девочками поровну равно количеству способов выбрать 4 конфеты из 12 и 4 конфеты из 8.

Выбрать 4 конфеты для первой девочки можно 12*11*10*9:4!=495 способами, после этого выбрать 4 конфеты для второй девочки можно 8*7*6*5:4!=70 способами. Всего есть 495*70=34650 способов разделить 12 конфет поровну между тремя девочками.

Ответ: а) 12*11*10*9*8*7:6!=924, б) 12*11*10*9:4!*8*7*6*5:4!=34650.

10 .Решение.

Если бы все фигуры были различными, то расставить их на первой горизонтали можно было бы 8! способами. Но так как среди фигур есть 2 одинаковые ладьи, 2 одинаковых слона и 2 одинаковых коня, то расставить их можно 8!:2!:2!:2!=5040 способами.

Ответ: 5040 способами.

11. Решение.

1) В слове СТОЛ все буквы различные. При перестановке букв мы будем получать четырехбуквенные слова. Для буквы С мы можем выбрать место в слове 4-мя способами (любое из четырех), после этого для буквы Т – 3-мя способами (любое место из трех оставшихся), после этого для буквы О – 2-мя способами (любое место из двух оставшихся), после этого место для буквы Л определяется однозначно (оставшееся). Поэтому количество возможных слов, полученных перестановкой букв в слове СТОЛ (включая само слово СТОЛ) равно 4*3*2*1=4!=24.

2) В слове ПОДУШКА все буквы различные. При перестановке букв мы будем получать 7-буквенные слова. Рассуждая так же, как в предыдущем пункте, получим, что количество возможных слов, полученных перестановкой букв в слове ПОДУШКА (включая само это слово) равно 7*6*5*4*3*2*1=7!=5040.

3) *1 способ.*

В слове ГОРОД есть две одинаковые буквы О. При перестановке букв мы будем получать 5-буквенные слова. Для буквы Г мы можем выбрать место в слове 5-ю способами (любое из пяти), после этого для буквы Р – 4-мя, после этого для буквы Д – 3-мя способами, после этого места для букв О определяются однозначно (оставшиеся два места). Поэтому количество возможных слов, полученных перестановкой букв в слове ГОРОД (включая само это слово) равно 5*4*3=60.

2 способ.

Если бы все буквы в слове были различны, то перестановкой букв мы бы могли получить 5*4*3*2*1=5!=120 различных слов. Но, так как в слове ГОРОД две буквы одинаковые, то среди 120 слов мы несколько раз учли одинаковые варианты. Учли их ровно столько раз, сколькими способами можно расставить в ряд две буквы, если бы они были различными, то есть 2*1=2!=2 раза. То есть среди 120 вариантов различных будет в 2 раза меньше, то есть 120:2=5!:2!=60.

4) Рассуждаем так же, как в предыдущем пункте.

1 способ.

В слове КАРАКАТИЦА есть четыре одинаковые буквы А и две одинаковые буквы К. При перестановке букв мы будем получать 10-буквенные слова. Для буквы Р мы можем выбрать место в слове 10-ю способами (любое из десяти), после этого для буквы Т – 9-ю способами, для буквы И – 8-ю способами, для буквы Ц – 7-ю способами. После этого для двух букв К место можно выбрать 6*5:2=15 способами, после этого для четырех букв А места определяются однозначно (оставшиеся четыре места). Поэтому количество возможных слов, полученных перестановкой букв в слове КАРАКАТИЦА (включая само это слово) равно 10*9*8*7*6*5:2=75600.

2 способ.

Если бы все буквы в слове были различны, то перестановкой букв мы бы могли получить 10*9*8*7*6*5*4*3*2*1=10!=3628800 различных слов. Теперь учтем тот факт, что четыре буквы А одинаковые. Значит, среди 10! слов мы несколько раз учли одинаковые варианты. Учли их ровно столько раз, сколькими способами можно расставить в ряд четыре буквы, если бы они были различными, то есть 4*3*2*1=4!=24 раза. То есть среди 10! вариантов различных будет в 24 раза меньше, то есть 10!:4!=3628800:24=151200.

Теперь учтем тот факт, что в оставшихся 151200 вариантах две буквы К одинаковые. Значит, среди 151200 слов мы несколько раз учли одинаковые варианты. Учли их ровно столько раз, сколькими способами можно расставить в ряд две буквы, если бы они были различными, то есть 2*1=2!=2 раза. То есть среди 151200 вариантов различных будет в 2 раза меньше, то есть 151200:2=10!:4!:2!=75600.

Ответ: 1) 4!=24, 2) 7!=5040, 3) 5!:2!=60, 4) 10!:4!:2!=75600.