Занятие номер	Класс	Тема
16	6 база	Комбинаторика. Часть 1.

1. Решение.

а) Так как все есть 5+3+4=12 различных учебников, то выбрать один учебник из них можно 12-ю способами.

б) Так как учебник по математике можно выбрать 5-ю способами, и для каждого выбранного учебника учебник по физике можно выбрать 3-мя разными способами, то выбрать один учебник по математике и один учебник по физике можно 5*3=15 способами.

в) Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что три учебника по разным предметам можно выбрать 5*3*4=60 способами.

г) Для учебника по математике и по физике можно выбрать 5*3=15 способами, два учебника по математике и по литературе – 5*4=20 способами, два учебника по физике и литературе – 3*4=12 способами. Всего есть 15+20+12=47 способов выбрать два учебника по разным предметам.

д) Первый учебник можно выбрать 12 способами, второй – 11 способами (из оставшихся), третий – 10 способами (из оставшихся). Так как порядок учебников в наборе не важен, то всего есть 12*11*10:3!=220 способов выбрать любые три учебника.

Ответ: а) 12, б) 15, в) 60, г) 47, д) 220.

2. Решение.

Отрезок с красным и зеленым концами можно провести 4*5=20 способами. Отрезок с красным и желтым концами можно провести 4*11=44 способами. Отрезок с зеленым и желтым концами можно провести 5*11=55 способами.

Всего есть 20+44+55=119 способов провести отрезок с разноцветными концами.

Ответ: 119.

3. Решение.

На первое место в очереди ребенка можно выбрать 5 способами, после этого на второе – 4 способами, затем на третье – 3 способами, на четвертое – 2 способами, на пятое – 1 способом. Всего есть 5*4*3*2*1=5!=120 способов выстроить в очередь 5 детей.

Если Женя стоит третьим, то остальных 4 детей на оставшиеся места в очереди можно расставить 4*3*2*1=4!=24 способами. Значит, всего есть 120-24=96 способов выстроить 5 детей в очередь так, чтобы Женя не стоял третьим.

Ответ: 120, 96.

4. Решение.

а) Все такие 5-значные числа имеют вид 2019*, где * – цифра, отличная от 2, 0, 1 и 9. Так как цифр всего 10, и последнюю цифру числа можно выбрать любую из 6 оставшихся, то всего есть 6 таких 5-значных чисел.

б) Все такие 6-значные числа имеют вид 2019**, где ** – две различные цифры, отличные от 2, 0, 1 и 9. Так как цифр всего 10, и предпоследнюю цифру числа можно выбрать любую из 6 оставшихся, а последнюю цифру – любую из 5 оставшихся, то всего есть 6*5=30 таких 6-значных чисел.

Ответ: 6, 30.

5. Решение.

Так как Миша строит башни из четного количества кубиков, то если в башне нечетное количество красных кубиков, то и нечетное количество синих кубиков. Таким образом, нечетное количество кубиков содержат башни из 1 синего и 5 красных кубиков, из 3 синих и 3 красных кубиков, из 5 синих и 1 красного кубиков.

Башен из 1 синего и 5 красных кубиков всего 6, так как синий кубик можно поставить на один из 6 этажей. Аналогично, башен из 5 синих и 1 красного кубика всего 6, так как красный кубик можно поставить на один из 6 этажей.

Посчитаем, сколько разных башен можно построить из 3 синих и 3 красных кубиков. Место для первого синего кубика можно выбрать 6 способами, затем для второго синего – 5 способами, затем для третьего синего – 4 способами. Так как все синие кубики одинаковы, то выбрать место в башне для трех синих кубиков можно 6*5*4:(3*2*1)=120:6=20 способами. После этого на оставшиеся места красные кубики определяются однозначно. Значит, можно построить всего 20 различных башен из 3 синих и 3 красных кубиков.

Таким образом, всего есть 6+6+20=32 различных башни, содержащие нечетное количество кубиков каждого цвета.

Ответ: 32.

6. Решение.

а) Распределим этажи по людям. Для первого человека этаж можно выбрать 8 способами (со 2-го по 9-й), для второго – тоже 8 способами, для третьего – 8 способами и для четвертого – 8 способами. Всего есть 8*8*8*8=8^4=4096 способов выхода.

б) Если всем нужно выйти на разных этажах, то для первого человека этаж можно выбрать 8 способами (со 2-го по 9-й), для второго – 7 способами (любой из оставшихся), для третьего – 6 способами и для четвертого – 5 способами. Всего есть 8*7*6*5=1680 способов выхода.

Ответ: а) 8*8*8*8=4096, б) 8*7*6*5=1680.

Решение.

По признаку делимости на 5 число должно оканчиваться на 0 или на 5. К тому же, шестизначное число не может начинаться с 0.

Учитывая это, на первое место в числе цифру можно выбрать 9 способами (любую, кроме 0), на второе, третье, четвертое и пятое места – 10 способами на каждое место, на шестое место – 2 способами (0 или 5). Всего есть 9*10*10*10*10*2=180000 шестизначных чисел, делящихся на 5.

Ответ: 180000.

7. Решение.

Компанию из 1 подружки Зоя может выбрать 5 способами.

Компанию из 2 подружек – 5*4:2=10 способами.

Компанию из 3 подружек – 5*4*3:(3*2*1)=10 способами. Заметим, что количество способов выбрать 3 подружек для прогулки равно количеству способов выбрать 2 подружек, с которыми Зоя гулять не пойдет.

Компанию из 4 подружек – 5*4*3*2:(4*3*2*1)=5 способами. Заметим, что количество способов выбрать 4 подружек для прогулки равно количеству способов выбрать 1 подружку, с которой Зоя гулять не пойдет.

Компанию из 5 подружек можно выбрать 1 способом.

Таким образом, всего есть 5+10+10+5+1=31 различная компания для прогулок. Значит, Зоя может гулять с разными компаниями не более 31 дня. Ровно с 2 подружками она может гулять не более 10 дней, ровно с 4 – не более 5 дней.

Ответ: 31, 10, 5.

8. Решение.

Сосчитаем, сколько всего существует 5-значных чисел. На первое место в числе цифру можно выбрать 9 способами (любую, кроме 0), на остальные места – 10 способами (любую из 10 цифр). Таким образом, всего есть 9*10*10*10*10=90000 пятизначных чисел.

Сосчитаем, в скольких из них есть 4 одинаковых цифры подряд. Заметим, что это числа, состоящие только из одинаковых цифр, или числа, у которых одинаковые 1-я, 2-я, 3-я и 4-я цифры, или числа, у которых одинаковые 2-я, 3-я, 4-я и 5-я цифры.

Чисел, состоящих из 5 одинаковых цифр всего 9 (11111, 22222, …, 99999). Чисел, у которых первые 4 цифры одинаковые, а последняя отличается, всего 9*9=81, так как первые 4 цифры можно выбрать 9 способами (любая цифра, кроме 0), последнюю цифру – 9 способами (любая цифра, кроме уже выбранной). Чисел, у которых последние 4 цифры одинаковые, а первая отличается, всего 9*9=81, так как первую цифру можно выбрать 9 способами (любая цифра, кроме 0), последние 4 цифры – 9 способами (любая цифра, кроме уже выбранной). Таким образом, всего есть 9+81+81=171 различных 5-значных чисел, в которых есть 4 одинаковых цифры подряд.

Теперь вычтем это количество из количества всех 5-значных чисел: 90000–171=89829 – у стольких 5-значных чисел нет 4 одинаковых цифр подряд.

Ответ: 89829.

9. Решение.

Всего выстроить 5 школьников в ряд можно 5*4*3*2*1=5!=120 способами.

Если Поля стоит сразу за Олей, то выбрать место для Оли и Поли можно 4 способами (1-е и 2-е, 2-е и 3-е, 3-е и 4-е, 4-е и 5-е), а на оставшиеся 3 места расставить школьников можно 3*2*1=3!=6 способами. Таким образом, расставить школьников в ряд так, что Поля стоит сразу за Олей, можно 4*6=24 способами.

Аналогично, расставить школьников в ряд так, что Ваня стоит сразу за Даней, можно 4*6=24 способами.

Кроме того, среди этих вариантов расстановки школьников есть такие, в которых Поля стоит сразу за Олей и Ваня стоит сразу за Даней. Таких вариантов всего 6: *ОПДВ, ОП*ДВ, ОПДВ*, *ДВОП, ДВ*ОП, ДВОП*, где * – пятый школьник. Или, по-другому, в этом случае мы можем считать каждую пару Оля+Поля и Даня+Ваня как одного человека (одно место) в ряду из трех человек (эти две пары и пятый школьник). Тогда расставить в ряд трех человек можно 3*2*1=6 способами.

Сложим варианты расстановки школьников, где Поля стоит сразу за Олей, и варианты, где Ваня стоит сразу за Даней, при этом мы дважды посчитаем варианты, где выполняются оба условия. Значит, в 24+24–6=42 вариантах выполняется хотя бы одно из условий (Поля стоит за Олей или Ваня стоит за Даней).

Теперь вычтем эти варианты из общего количества вариантов расстановки школьников: 120–42=78 – столькими способами можно расставить в ряд 5 школьников, чтобы Поля не стояла сразу за Олей, а Ваня не стоял сразу за Даней.

Если школьников шесть, то всего вариантов расстановки школьников будет 6*5*4*3*2*1=6!=720. Вариантов, где Поля стоит сразу за Олей, – 5*4!=5*24=120. Вариантов, где Ваня стоит сразу за Даней, – 5*4!=5*24=120. Кроме того, среди этих вариантов расстановки школьников есть такие, в которых Поля стоит сразу за Олей и Ваня стоит сразу за Даней. В этом случае мы можем считать каждую пару Оля+Поля и Даня+Ваня как одного человека (одно место) в ряду из четырех человек (эти две пары и еще два школьника). Тогда расставить в ряд четырех человек можно 4*3*2*1=24 способами.

Теперь вычтем из общего количества вариантов расстановки 6 школьников те, где Поля стоит сразу после Оли или Ваня стоит сразу после Дани: 720–(120+120–24) = 720–216 = 504 – столькими способами можно расставить в ряд 6 школьников, чтобы Поля не стояла сразу за Олей, а Ваня не стоял сразу за Даней.

Ответ: 78, 504.

10. Решение.

Пару из девочки и мальчика можно выбрать 8*7=56 способами. Пару из двух девочек – 8*7:2=28 способами. Таким образом, выбрать пару детей, среди которых есть хотя бы одна девочка, можно 56+28=84 способами.

Или, по-другому, выбрать пару детей из 15 можно 15*14:2=105 способами. Из них 7*6:2=21 способом можно выбрать пару мальчиков. Значит, 105-21=84 способами можно выбрать пару, в которой есть хотя бы одна девочка.

Сосчитаем, сколькими способами можно выбрать четверых детей, среди которых мальчиков и девочек поровну, то есть по двое. Выбрать двух мальчиков в эту группу можно 7*6:2=21 способом. Для каждой этой пары мальчиков выбрать пару девочек можно 8*7:2=28 способами. Значит, выбрать четверку детей, среди которых два мальчика и две девочки, можно 21*28=588 способами.

Ответ: 84, 588.

11. Решение.

Выбрать пару героев, которые в данной серии поссорятся, можно 6*5:2=15 способами. Для каждой из этих выбрать пару героев, которые станут свидетелями преступления, можно 6*5:2=15 способами. Значит, выбрать две пары героев для серии можно 15*15=225 способами. Таким образом, в сериале возможно не более 225 серий, в которых пары пар различны.

В 7 месяцах не более 31*5+30*2=155+60=215 дней (если считать месяца с июля по январь). 215<225, значит, сериал может не надоесть зрителям за 7 месяцев, даже если выходит ежедневно.

Ответ: может.

Домашнее задание 16.

1. Решение.

1 способ.

Всего четырехзначных чисел 9*10*10*10=9000 (на первое место цифру можно выбрать 9 способами (любую, кроме 0), на остальные места – 10 способами на каждое место).

Сосчитаем количество четырехзначных чисел, в которых сумма цифр нечетна. Сумма четырех цифр нечетна, если нечетных цифр среди них нечетное количество, то есть 1 или 3 нечетных цифры.

Если в числе 1 нечетная цифра, и она стоит на первом месте, то на первое место цифру можно выбрать 5 способами (любую нечетную цифру), на остальные места – 5 способами на каждое место (любую четную цифру). Всего таких чисел 5*5*5*5=625.

Если в числе 1 нечетная цифра, и она стоит на втором месте, то на первое место цифру можно выбрать 4 способами (любую четную цифру, кроме 0), на второе – 5 способами (любую нечетную цифру), на остальные места – 5 способами на каждое место (любую четную цифру). Всего таких чисел 4*5*5*5=500. Аналогично, будет по 500 четырехзначных чисел, в которых одна нечетная цифра, и она стоит на третьем и на четвертом месте.

Таким образом, всего есть 625+3*500=2125 четырехзначных чисел с одной нечетной цифрой.

Если в числе 3 нечетных цифры, а единственная четная цифра стоит на первом месте, то на первое место цифру можно выбрать 4 способами (любую четную цифру, кроме 0), на остальные места – 5 способами на каждое место (любую нечетную цифру). Всего таких чисел 4*5*5*5=500.

Если в числе 3 нечетных цифры, а единственная четная цифра стоит на втором месте, то на второе место цифру можно выбрать 5 способами (любую четную цифру), на остальные места – 5 способами на каждое место (любую нечетную цифру). Всего таких чисел 5*5*5*5=625. Аналогично, будет по 625 четырехзначных чисел, в которых одна четная цифра, и она стоит на третьем и на четвертом месте.

Таким образом, всего есть 500+3*625=2375 четырехзначных чисел с тремя нечетными цифрами.

Четырехзначных чисел с нечетной суммой цифр – всего 2125+2375=4500. Значит, остальные 9000-4500=4500 четырехзначных чисел имеют четную сумму цифр.

2 способ.

Всего четырехзначных чисел 9*10*10*10=9000 (на первое место цифру можно выбрать 9 способами (любую, кроме 0), на остальные места – 10 способами на каждое место).

Разобьем все числа на группы по 10: 1000 … 1009, 1010 … 1019, …, 9990 … 9999. Заметим, что в каждой такой группе чисел с четной и нечетной суммой цифр поровну (из 10, они чередуются, так как сумма цифр каждого следующего числа на 1 больше суммы цифр предыдущего числа).

Значит, среди всех четырехзначных чисел с четной суммой цифр и с нечетной суммой цифр чисел поровну, то есть по 9000:2=4500.

Ответ: 4500.

2. Решение.

Посчитаем сначала, сколько всего четырехбуквенных слов можно составить. На первое место в слове букву можно выбрать 6 способами, на второе – тоже 6, на третье – 6 и на четвертое – 6. Всего можно составить 6*6*6*6=64=1296 четырехбуквенных слов.

Посчитаем теперь, сколько среди этих слов такие, в которых буквы не совпадают, то есть различны. На первое место в слове букву можно выбрать 6 способами, на второе – только 5, на третье – 4 и на четвертое – 3. Всего можно составить 6*5*4*3=360 четырехбуквенных слов из различных букв.

Вычтем из первого количества второе: 1296–360=936 – в стольких четырехбуквенных словах хотя бы две буквы совпадают.

Ответ: 936.