Домашнее задание 7 класс база.

1. Решение.

12=3*4, 3 и 4 – взаимно простые числа. Значит, чтобы число делилось на 12, нужно, чтобы оно делилось на 3 и на 4.

Чтобы число делилось на 4, последние две его цифры должны образовывать двузначное число, делящееся на 4. Из цифр 2 и 3 можно составить двузначные числа 22, 33, 23 и 32. Из этих чисел только число 32 делится на 4. Значит, искомое число должно оканчиваться на 32.

Чтобы число делилось на 3, сумма его цифр должна делиться на 3. Сумма последних двух цифр искомого числа равна 3+2=5. Если добавить еще одну цифру 2 или 3, то сумма цифр числа станет равна 7 или 8, то есть не будет делиться на 3. Значит, нужно добавить не менее двух цифр. Добавив две цифры 2, получим сумму цифр, равную 3+2+2+2=9. 9 делится на 3, значит, число, состоящее из этих четырех цифр, будет делиться на 3.

Таким образом, наименьшее искомое число будет состоять из четырех цифр и оканчиваться на 32. Это число 2232.

Ответ: 2232.

2. Решение.

Разложим числа 418, 456 и 494 на простые множители:

418 = 2*11*19

456 = 2*2*2*3*19

494 = 2*13*19

Так как все вагоны в поездах рассчитаны на одинаковое количество пассажиров, то на это количество пассажиров должны делиться все три числа. Числа 418, 456 и 494 имеют два общих простых делителя – 2 и 19 и один общий составной делитель – 2*19=38.

Если каждый вагон рассчитан на 2 пассажиров, то в первом поезде всего 11*19 вагонов, во втором – 2*2*3*19 вагонов, в третьем – 13*19 вагонов, а всего вагонов в трех поездах будет больше 50, что противоречит условию задачи.

Если каждый вагон рассчитан на 19 пассажиров, то в первом поезде всего 2*11=22 вагона, во втором – 2*2*2*3=24 вагона, в третьем – 2*13=26 вагонов, а всего вагонов в трех поездах будет больше 50, что противоречит условию задачи.

Если каждый вагон рассчитан на 38 пассажиров, то в первом поезде всего 11 вагонов, во втором – 2*2*3=12 вагонов, в третьем – 13 вагонов, а всего вагонов в трех поездах будет 11+12+13=36, что соответствует условию задачи.

Ответ: 11, 12 и 13 вагонов соответственно.

3. Решение.

Составим таблицу чисел, загаданных мальчиками, в зависимости от остатков:

Остаток	0	1	2	3	4	5	6
Число Димы	14	15	16	10	11	12	13
Число Жени	98	99	93	94	95	96	97
Разность	84	84	77	84	84	84	84

Как видим, разность чисел Жени и Димы равна 77, если остатки от деления равны 2, и 84 в остальных случаях.

Ответ: 84 или 77.

4. Доказательство.

Докажем, что найдется гном, который повесил не менее 5 шариков. Предположим, что это не так, то есть каждый гном повесил менее 5 шариков, а значит, не более 4. Тогда семь гномов вместе повесили не более 4*7=28 шариков, что противоречит тому, что было повешено 33 шарика. Значит, предположение неверно, и найдется гном, который повесил не менее 5 шариков.

Докажем, что найдется гном, который повесил не более 5 шариков. Предположим, что это не так, то есть каждый гном повесил более 5 шариков, а значит, не менее 6. Тогда семь гномов вместе повесили не менее 6*7=42 шариков, что противоречит тому, что было повешено 33 шарика. Значит, предположение неверно, и найдется гном, который повесил не более 5 шариков.

Утверждать, что обязательно найдется гном, повесивший ровно 5 шариков, нельзя. Например, гномы могли повесить 4, 4, 4, 4, 4, 6, 7 шариков – всего 33 шарика, и никто не повесил ровно 5.

Доказано.

5. Решение.

Пусть на балу было Д дам и К кавалеров.

Тогда пар «дама+кавалер» было 7*Д, а пар «кавалер+дама» было 4*К.

Так как это одни и те же пары, то 7*Д=4*К. Отсюда Д=$^4/_7$*К.

Тогда всего на балу было $^4/_7$*К + К = $^{11}/_7$*К людей.

Если $^{11}/_7$*К=112, то К=112:11*7. Так как 112 не делится на 11, то К – не целое число, что невозможно, так как это количество кавалеров.

Ответ: не могло.

6. Решение.

Так как граф не имеет циклов, то каждая его компонента связности – это дерево. В дереве ребер на 1 меньше, чем вершин. Значит, в трех деревьях ребер на 3 меньше, чем вершин. Поэтому в данном графе 100–3=97 ребер.

Ответ: 97 ребер.

7. Доказательство.

Предположим, что этот граф не является связным. Значит, в нем есть такие две вершины, между которыми нет пути в графе, то есть они находятся в разных компонентах связности. Тогда в каждой компоненте связности будет не менее 1+10=11 вершин, а всего в графе – не менее 11+11=22 вершины. Это противоречит условию задачи. Значит, предположение неверно, и этот граф связный.
Доказано.

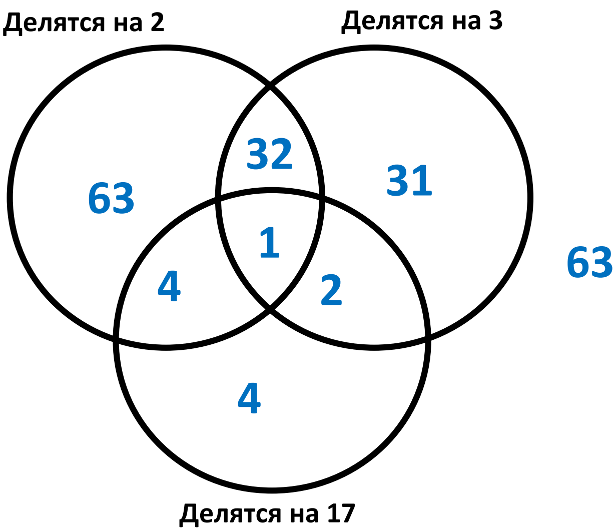
8. Решение.

Рассматриваем целые числа от 1 до 200. Среди этих чисел:

Каждое второе, а всего [200:2]=100 чисел делятся на 2,
Каждое третье, а всего [200:3]=66 чисел делятся на 3,
Каждое 17-е, а всего [200:17]=11 чисел делятся на 17,
Каждое шестое, а всего [200:6]=33 числа делятся на 6=2*3,
Каждое 34-е, а всего [200:34]=5 чисел делятся на 34=2*17,

Каждое 51-е, а всего [200:51]=3 числа делятся на 51=3*17,
Каждое 102-е, а всего [200:102]=1 число делится на 102=2*3*17.

Можно изобразить множество целых чисел от 1 до 200 в виде схемы:



Теперь мы можем ответить на вопрос задачи. Чисел от 1 до 200, которые делятся на 2 или на 3, но не делятся на 17, всего 63+32+31=126.

Ответ: 126.

9. Решение.

При каждом взвешивании все монеты можно разделить на три части: по одной на каждой чаше весов (имеет смысл взвешивать только равные по количеству монет части) и одна часть не участвует во взвешивании. Результат взвешивания – это определение, в какой из этих трех частей находится фальшивая монета (если одна чаша весов перевесила, что фальшивая монета на второй чаше, если весы в равновесии, то фальшивая монета в отложенной части). Таким образом, каждое взвешивание равносильно *разделению всего множества монет на три части и выбору одной из этих трех частей*.

Так как нужно найти одну из 55 монет, то после первого взвешивания найдется часть не менее чем из 19 монет (иначе, если все три части состоят не более чем из 18 монет, то всего монет не более 18*3=54). Если фальшивая монета окажется в этой части, то после второго взвешивания найдется часть не менее чем из 7 монет (иначе, если все три части состоят не более чем из 6 монет, то всего монет в этой части не более 6*3=18). Если фальшивая монета окажется в этой части, то после третьего взвешивания найдется часть не менее чем из 3 монет (иначе, если все три части состоят не более чем из 2 монет, то всего монет в этой части не более 2*3=6). Если фальшивая монета окажется в этой части, то для того, чтобы найти ее, потребуется еще не менее 1 взвешивания. Значит, нужно сделать *не менее 4 взвешиваний*.

За 4 взвешивания найти фальшивую монету можно, например, так. Первое взвешивание: две кучи по 18 монет на чашах весов и одна куча из 19 монет отложена. Второе взвешивание: две кучи по 6 монет на чашах весов и одна куча из 6 или 7 монет отложена. Третье взвешивание: две кучи по 2 монеты на чашах весов и одна куча из 2 или 3 монет отложена. Четвертое взвешивание: по 1 монете на чашах весов и, возможно, 1 монета отложена. В каждом взвешивании участвуют монеты из «подозрительной» кучи, определенной при предыдущем взвешивании.

Ответ: 4.