Занятие номер	Класс	Тема
14	7 база	Принцип крайнего

1. Доказательство.

Рассмотрим человека с самым маленьким ростом в хороводе. Его сосед справа выше него. Значит, этот человек соврал.

Доказано.

2. Доказательство.

Рассмотрим наибольшее число в круге. Если таких чисел несколько, то рассмотрим любое из них. Оно не меньше обоих соседей и равно их полусумме. Если рассматриваемое число строго больше хотя бы одного из своих соседей, то оно и строго больше полусуммы соседей (если $a>b$ и $a\geq c$, то $a+a>b+c$, или $a>(b+c):2$), что противоречит условию задачи. Значит, это число *равно* каждому из своих соседей.

Получили, что в круге есть еще, как минимум, два равных числа, при этом все остальные числа их не превосходят (так как мы рассматривали соседей наибольшего числа в круге). Значит, эти два числа также равны обоим своим соседям. Рассуждая аналогично, получим, что все числа в круге равны.

Доказано.

3. Доказательство.

Рассмотрим наибольшее из чисел на доске (если таких чисел несколько, то рассмотрим одно из них). С одной стороны, это самое большое на доске, то есть оно *не меньше* всех чисел, соседних с ним по стороне. С другой стороны, по условию задачи, оно *равно среднему арифметическому* чисел, соседних с ним по стороне. Значит, это число *равно* каждому из чисел, соседних с ним по стороне. Далее, каждое из этих соседних чисел тоже равно каждому из соседей. Рассмотрев таким образом все числа на доске, получим, что все они равны.

Доказано.

4. Доказательство.

Допустим, что мальчики смогли выстроиться в хоровод указанным образом. Рассмотрим самого высокого мальчика (если их несколько, то одного из них). Он *не ниже* обоих своих соседей, а это противоречит замыслу, что один сосед выше, другой сосед ниже. Значит, так выстроиться в хоровод мальчики не смогут.

Доказано.

5. Доказательство.

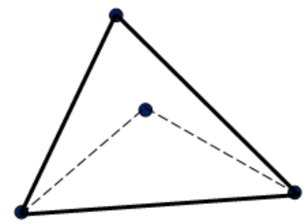
Рассмотрим зайчонка с самым маленьким барабаном. Он не сможет начать барабанить, так как у него барабан меньше всех. Значит, барабанить могут начать не более 6 зайчат.

6 зайчат будут барабанить в том случае, если зайчонку с самым маленьким барабаном достанутся и самые короткие палочки.

Доказано.

6. Доказательство.

Из всех возможных треугольников с вершинами в указанных точках рассмотрим треугольник с наименьшей площадь (если таких треугольников несколько, то рассмотрим один из них). Этот треугольник – искомый.



Действительно, если внутри этого треугольника содержится какая-нибудь из данных точек, то можно построить треугольник с вершиной в этой точке и двух вершинах рассматриваемого треугольника, и он будет иметь меньшую площадь. А это противоречит тому, что рассматриваемый треугольник имеет наименьшую площадь.

Значит, внутри рассматриваемого треугольника не содержится ни одной из данных точек.

Доказано.

7. Решение.

Чтобы из трех палочек можно было сложить треугольник, нужно, чтобы длины палочек удовлетворяли неравенству треугольника: сумма длин двух палочек больше длины третьей палочки.

Рассмотрим самую длинную палочку из «Конструктора» и две самых коротких. Если из них можно сложить треугольник, то это можно сделать и из любых трех палочек набора.

Действительно, пусть длины двух самых коротких палочек равны a и b (для определенности пусть $a \le b$), а длина самой длинной палочки равна c. Если из этих палочек можно сложить треугольник, то $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$.

Выберем любые три палочки из набора. Пусть их длины равны k, n и m, причем $b \le k, n, m \le c$. Тогда $\mathbf{n+k}\ge b+b\ge a+b>c\ge\mathbf{m}$, $\mathbf{n+m}\ge b+b\ge a+b>c\ge\mathbf{k}$, $\mathbf{k+m}\ge b+b\ge a+b>c\ge\mathbf{n}$. То есть для любых выбранных трех палочек выполняется неравенство треугольника, значит, из них можно сложить треугольник.

Таким образом, Пете достаточно проверить, можно ли сложить треугольник из двух самых коротких и одной самой длинной палочек.

Ответ: 1 проверка.

8. Доказательство.

Рассмотрим две планеты A и B, расстояние между которыми наименьшее. Астроном на планете A смотрит на планету B, а астроном на планете B смотрит на планету A. Если найдется астроном, который смотрит на планету A или B, то найдется планета, на которую никто не смотрит (так как планет и астрономов одинаковое количество, а на одну из планет смотрит два астронома). Если такого астронома нет, то исключим из рассмотрения планеты A и B. Получим систему из 15 планет, для которых выполняется условие задачи. Продолжая так же рассуждать далее, придем к случаю трех планет. Выбрав среди них две, расстояние между которыми наименьшее, получим, что на оставшуюся планету никто не смотрит.

Доказано.

Домашнее задание 14.

Доказательство.

Среди всех ладей рассмотрим ту, которая является *крайней левой*. Если таких ладей несколько, то рассмотрим ту, которая является *крайней верхней* из них. Так как ладьи бьют по горизонтали и по вертикали, то эта ладья может бить только ближайшую справа (так как левее нее ладей нет) и ближайшую снизу ладьи (так как выше нее в этой вертикали ладей нет), то есть не более двух ладей.

Доказано.