

6 база. НОД и НОК. Часть 2.

1. Решение.

Допустим, что числа n и $n+1$ имеют общий делитель $d > 1$. Тогда, так как каждое из этих чисел делится на d , то и разность этих чисел делится на d . Но разность этих чисел равна $(n+1)-n=1$ и делится только на 1.

Значит, числа n и $n+1$ имеют единственный общий делитель, равный 1. НОД $(n, n+1)=1$.

Ответ: 1.

2. Решение.

Число 1000 можно представить в виде произведения двух чисел таким образом:

$$1000=1*1000=2*500=4*250=5*200=8*125=10*100=20*50=25*40.$$

НОД этих чисел в этих случаях равен 1, 2, 2, 5, 1, 10, 10, 5 соответственно.

Наибольшее возможное значение НОД двух чисел, произведение которых равно 1000, - это 10.

Ответ: 10.

3. Решение.

Пусть на острове Невезения в сутках n часов, в часе m минут, а в минуте k секунд.

Тогда $n*m=77$, $m*k=91$, откуда понятно, что m – это общий делитель чисел 77 и 91.

Делители числа 77 – это 1, 7, 11, 77. Делители числа 91 – это 1, 7, 13, 91.

Значит, $m=7$. Тогда $n=11$, $k=13$. То есть на острове в сутках 11 часов, в часе 7 минут, в минуте 13 секунд.

Всего в сутках $11*7*13=1001$ секунда.

Ответ: 1001 секунда.

4. Доказательство.

Пусть даны натуральные числа a и b , причем $a > b$.

Обозначим их НОД буквой d , тогда их НОК равен $27d$.

Числа a и b можно представить в виде: $a=d*n$, $b=d*k$, где n и k – взаимно простые числа (обсуждалось на теории), причем $n > k$. Тогда $a*b=d^2*n*k$.

С другой стороны, произведение чисел a и b равно произведению их НОД и НОК (обсуждалось на теории): $a*b=d*27d=27d^2$.

Из равенства $d^2*n*k=27d^2$ получаем, что $n*k=27$.

Так как $27=1*27=3*9$, а числа n и k – взаимно простые, и $n > k$, то $n=27$, $k=1$.

Тогда $a=27d$, $b=d$, отсюда получаем, что $a=27b$, а это значит, что a делится на b .

Доказано.

5. Доказательство.

Разложим на простые множители все НОДы:

$$\text{НОД}(a, b) = 175 = 5^2 \cdot 7.$$

$$\text{НОД}(a, c) = 225 = 3^2 \cdot 5^2.$$

$$\text{НОД}(b, c) = 65 = 5 \cdot 13.$$

Так как 5^2 входит в НОД (a, b) и в НОД (a, c) , то 5^2 входит в разложение на простые множители чисел a , b и c . Но тогда 5^2 должно входить в НОД (b, c) , а в него входит только 5. Получили противоречие. Значит, Петя где-то ошибся.

Доказано.