

Занятие номер	Класс	Тема
11	8 база	Игры. Анализ позиций.

1. Решение.

Определим, какие позиции в игре являются выигрышными (+) и проигрышными (-).

Если между шашками осталось 0 клеток, то это проигрышная позиция (игрок в этой позиции не может сделать ход).

Если между шашками осталась 1 клетка, то это выигрышная позиция. Если осталось 2 клетки, то это проигрышная позиция, если 3 клетки – выигрышная, если 4 клетки – выигрышная.

Если осталось 5 клеток, то это выигрышная позиция для игрока, так как, сдвинув свою шашку на 3 клетки, он переведет противника в проигрышную позицию «осталось 2 клетки».

Если между шашками осталось 6 клеток, то это выигрышная позиция для игрока, так как, сдвинув свою шашку на 4 клетки, он переведет противника в проигрышную позицию «осталось 2 клетки».

Если между шашками осталось 7 клеток, то это проигрышная позиция для игрока, так как, сдвинув свою шашку на 1, 3 или 4 клетки, он переведет противника в выигрышную позицию «осталось 5 клеток», «осталось 4 клетки» или «осталось 3 клетки».

И так далее. Занесем результаты в таблицу:

Сколько клеток между шашками	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Позиция	-	+	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	-	+	-	+

Как видим, начальная позиция игры, когда между шашками есть 24 клетки, является выигрышной для игрока, который первым делает ход. Значит, в этой игре он выиграет.

Для выигрыша ему нужно каждым своим ходом переводить соперника в проигрышную позицию. Например, первый игрок может первым ходом сдвинуть шашку на 1 клетку (перевести второго в позицию «23»). Затем, второй игрок может перевести первого в позицию «22» (тогда первый следующим ходом переводит второго в позицию «21»), «19» (тогда первый следующим ходом переводит второго в позицию «16») или «18» (тогда первый следующим ходом переводит второго в позицию «14»), и так далее.

По таблице понятно, как следует ходить первому игроку, чтобы второй всегда оказывался в проигрышной позиции.

Ответ: выиграет первый.

2. Решение.

Определим, какие позиции в игре являются выигрышными (+) и проигрышными (-).

Позиция 11 – проигрышная, так как если игрок оказался в этой позиции, то значит, ходом раньше на 11 стрелку перевел его соперник, и выиграл. Про позицию 10 пока нельзя сказать, выигрышная она или проигрышная, так как из нее возможен переход в позиции 12 и 1, про которые пока тоже ничего неизвестно. Занесем предварительные результаты в таблицу:

На каком числе стоит стрелка	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0 (12)
Позиция для игрока, который должен сделать ход	-	?	+	+	?	-	?	+	+	?	-	?

Как видим, позиция 1 – проигрышная. Значит, позиция 10 – выигрышная, так как из нее можно перейти в проигрышную позицию 1. Теперь мы можно определить выигрышность всех позиций:

На каком числе стоит стрелка	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0 (12)
Позиция для игрока, который должен сделать ход	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	+

Как видим, начальная позиция игры, когда стрелка стоит на 12, является выигрышной для игрока, который первым делает ход. Значит, в этой игре выиграет первый игрок.

Для выигрыша ему нужно каждым своим ходом переводить соперника в проигрышную позицию. Первым ходом ему нужно сдвинуть стрелку на 2 часа. Затем, если второй игрок сдвигает стрелку на 2 часа, то первый – на 3. Если второй игрок сдвигает стрелку на 3 часа, то первый – на 2. И так далее.

Ответ: выиграет первый.

3. Решение.

Определим, какие клетки на шахматной доске являются выигрышными позициями. Ясно, что если один игрок уже поставил короля в правый верхний угол, то такая позиция является проигрышной для того, кто должен сделать следующий ход. Три клетки вокруг этой угловой являются выигрышными позициями, так как из них можно за один ход попасть в правую верхнюю клетку:

8							+	-
7							+	+
6								
5								
4								
3								
2								
1								
	A	B	C	D	E	F	G	H

Далее, если из клетки за один ход можно попасть в проигрышную позицию (перевести противника в проигрышную позицию), то эта позиция выигрышная. Если из клетки за один ход можно попасть только в выигрышные позиции, то эта позиция проигрышная. В соответствии с этим заполним все клетки:

8	+	-	+	-	+	-	+	-
7	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	-	+	-	+	-	+	-
5	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	-	+	-	+	-	+	-
3	+	+	+	+	+	+	+	+

2	+	-	+	-	+	-	+	-
1	+	+	+	+	+	+	+	+
	A	B	C	D	E	F	G	H

Как видим, левая нижняя клетка является выигрышной позицией для игрока, который делает первый ход. Поэтому, если Оля ходит первой, то она выиграет. Для этого ей нужно в каждый свой ход переводить Пашу в проигрышную позицию. Как можно увидеть по таблице, она всегда это может сделать.

Паша поступил неправильно с точки зрения игрока, но правильно с точки зрения джентльмена. :).

Ответ: выиграет Оля, а Паша поступил неправильно.

4. Решение.

Как и в предыдущей задаче определим клетки доски, являющиеся выигрышными и проигрышными позициями в игре:

8	+	+	-	-	+	+	-	-
7	+	+	-	-	+	+	-	-
6	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	-	-	+	+	-	-
3	+	+	-	-	+	+	-	-
2	+	+	+	+	+	+	+	+
1	-	+	+	+	+	+	+	+
	A	B	C	D	E	F	G	H

Как видим, клетка A1 является проигрышной позицией. Значит, в этой игре первый игрок проиграет. А у второго игрока есть выигрышная стратегия: ему нужно каждый своим ходом переводить первого игрока в проигрышную позицию. По таблице видно, что второй игрок всегда это может сделать.

Ответ: выиграет второй.

5. Решение.

Определим, какие позиции в игре являются выигрышными и проигрышными. Запишем результат в таблицу, в которой клетка с координатами (m, n) соответствует позиции игры, когда в первой куче m камней, во второй куче n камней. Позиции (0, 0), (0,1), (1,0) (а также любые позиции, в которых в одной из куч 0 спичек) и (1, 1) – проигрышные, так как в них нельзя сделать ход. Позиции (1, 2), (2, 1) и (2, 2) – выигрышные:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	-	-										
2	-											
3	-											
4	-											
5	-											
6	-											
7	-											
8	-											

9	-											
10	-											
11	-											

Заметим, что переход из любой клетки таблицы возможен либо на 2 клетки вверх и 1 клетку влево, либо на 2 клетки влево и 1 клетку вверх (это соответствует тому, что из одной кучи взяли 2 спички, а из другой – 1 спичку). В соответствии с этим, определим выигрышность остальных позиций:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+
5	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+
6	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-
7	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+
8	-	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	+
9	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	-
10	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+
11	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+

Как видим, позиция (11, 11) является выигрышной. Значит, в этой игре выиграет первый игрок. Для этого ему каждым ходом нужно переводить второго игрока в проигрышную позицию.

Например, первый игрок может делать ходы, противоположные ходу второго игрока (брать 2 и 1 спички из куч, противоположных тем, из которых брал спички второй игрок). Тогда после первого хода в кучках станет 10 и 9 спичек, далее за каждую пару ходов (ход второго и ход первого), количество спичек в каждой кучке будет уменьшаться на 3). Значит, после очередного хода первого игрока в кучках станет 1 и 0 спичек, и второй не сможет сделать ход.

Ответ: выиграет первый.

6. Решение.

Определим выигрышные и проигрышные позиции в игре. Запишем результаты в клетках таблицы 5x7. Заметим, что по правилам игры мы можем перейти либо на 1 клетку вверх, либо на 1 клетку влево, либо на 1 клетку по диагонали вверх и влево. Анализ позиций начинаем с позиции (0, 0), когда в кучках не осталось камней.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-	+	-	+	-	+	-	+
1	+	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	-	+	-	+	-	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+
4	-	+	-	+	-	+	-	+

5	+	+	+	+	+	+	+	+	+
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Как видим, начальная позиция игры (5,7) является выигрышной. Значит, в этой игре выиграет первый игрок. Для этого ему нужно каждым своим ходом переводить второго игрока в проигрышную позицию. По таблице можно заметить, что первый игрок в первый ход должен взять по 1 камню из обеих куч, а затем в точности повторять ходы соперника. Так как после первого хода количество камней в кучах станет четным (4 и 6), а каждый игрок уменьшает количество камней в куче/кучах на 1, то если есть ход у второго игрока, то есть ход и у первого игрока. Первым не сможет сделать ход второй игрок.

Ответ: выиграет первый.

7. Решение.

Проанализируем позиции, запишем результаты в таблицу. По правилам игры за один ход мы можем перейти либо на 1 клетку влево, либо на 1 клетку вверх, либо 1 клетку по диагонали влево-вверх, либо на 1 клетку по диагонали влево-вниз, либо на 1 клетку по диагонали вправо-вверх.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
2	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-		
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			
4	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-				
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+					
6	-	+	-	+	-	+	-	+	-						
7	+	+	+	+	+	+	+	+							
8	-	+	-	+	-	+	-								
9	+	+	+	+	+	+									
10	-	+	-	+	-										
11	+	+	+	+											
12	-	+	-												
13	+	+													
14	-														

Как видим, начальная позиция (7, 7) является выигрышной. Значит, в этой игре победит первый игрок. Для этого ему нужно в каждый ход переводить второго игрока в проигрышную позицию.

Как можно заметить, то выигрышная стратегия первого игрока такова: первым ходом ему нужно либо съесть по апельсину из обеих кучек, либо переложить апельсин из одной кучки в другую (сделать количество апельсинов в каждой кучке четным), а затем в точности повторять ходы второго игрока.

Ответ: выиграет первый.

8. Решение.

Заметим, что на каждом ходе имеется ровно две кучки конфет. Поэтому можно указать выигрышные и проигрышные позиции в виде таблицы, где клетка (m, n) соответствует позиции, когда в одной кучке m конфет, в другой n конфет.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

3	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
12	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
14	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
17	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
18	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
19	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
20	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Как видим, в игре является выигрышной любая позиция, в которой хотя бы в одной из кучек четное количество конфет. Если в обеих кучках нечетное количество конфет, то эта позиция проигрышная.

Начальная позиция (20, 21) выигрышная, значит, в этой игре победит первый игрок. Для этого ему нужно в каждый свой ход делать обе кучки конфет нечетными (переводить второго в проигрышную позицию). Например, первым ходом первому игроку нужно съесть кучку из 21 конфеты, а вторую кучку разделить на кучки, например, 9 и 11. Так как второму игроку всегда достаются две кучки с нечетным количеством конфет, то после его хода всегда будет образовываться кучка с четным и кучка с нечетным количеством конфет. Первый игрок кучку с четным количеством конфет должен разделить на две кучки с нечетным количеством конфет, а вторую кучку съесть.

Ответ: выиграет первый.

9. Решение.

Определим выигрышные позиции в игре. Здесь выигрышность позиции зависит от того, сколько спичек было взято на предыдущем ходе. Получим такие таблицы:

а)

Позиция → Ск. спичек взято на предыдущем ходе ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-
2	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+		

3	+	+	-	-	+	+	-	-	+			
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--

Начальная позиция 12 проигрышная, так как из нее можно перейти только в выигрышные позиции (1, 11), (2, 10) и (3, 9). Значит, в этой игре выиграет второй игрок. Для этого ему нужно каждым ходом переводить первого игрока в проигрышную позицию.

б)

Позиция → Ск. спичек взято на предыдущем ходе ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+
2	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+		
3	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+			

Начальная позиция 13 выигрышная, так как из нее можно перейти в проигрышную позицию (1, 12). Значит, в этой игре выиграет первый игрок. Первым ходом ему нужно взять 1 спичку, а затем каждым ходом переводить второго игрока в проигрышную позицию.

Ответ: а) выиграет второй, б) выиграет первый.

Домашнее задание 11.

Решение.

Определим выигрышные и проигрышные позиции в игре. Позицией является число, полученное на данный момент в игре. Ясно, что позиция 100 является проигрышной для игрока, которому нужно сделать ход. Позиции с 51 по 99 – выигрышные, так как из этой позиции можно получить число 100. Позиция 50 – проигрышная, так как 100 получить из нее нельзя, но прибавив хотя бы 1, получим выигрышную позицию для соперника. Позиции с 26 по 49 – выигрышные, так как из них можно перейти в проигрышную позицию 50. И так далее.

Таким образом, проигрышные позиции в этой игре: 100, 50, 25, 12, 6. Выигрышные – все позиции от 4 до 99 за исключением проигрышных.

Начальная позиция 4 является выигрышной, значит, в этой игре выиграет первый игрок. Для этого ему каждым ходом нужно переводить второго игрока в проигрышную позицию, то есть первым ходом прибавить 2 и получить 6, затем прибавить к числу второго игрока столько, чтобы получилось 12, затем столько, чтобы получилось 25, и так далее. Последним ходом первый игрок получит 100 и выиграет.

Ответ: выиграет первый.