

Занятие номер	Класс	Тема
13	7 база	Неравенства и оценки.

1. Решение.

Пусть K , C , M и P – это цена куклы, скакалки, машинки и робота соответственно.

По условию задачи:

$$K > C + M, \quad (1)$$

$$P > K. \quad (2)$$

Сложим неравенства (1) и (2), получим: $K + P > C + M + K$.

$$\text{Вычтем из обеих частей полученного неравенства число } K, \text{ получим: } P > C + M. \quad (3)$$

$$\text{Скакалка не бесплатна, значит, } 0 < C. \quad (4)$$

Вычтем из неравенства (3) неравенство (4). Это можно сделать, так как неравенства противоположных знаков. Сохранится знак неравенства (3): $P - 0 > C + M - C$, или $P > M$.

Значит, робот дороже машинки.

Ответ: робот.

2. Решение.

Пусть A и T – это цена альбома и тетради соответственно.

По условию задачи:

$$2A + T > 2T + A.$$

Вычтем из обеих частей этого неравенства $T + A$, получим:

$$2A + T - T - A > 2T + A - T - A, \text{ или } A > T.$$

Значит, альбом дороже тетради.

Ответ: альбом.

3. Решение.

Пусть M , B и C – это цена мороженого, булочки и стакана сока соответственно.

По условию задачи:

$$M > 2B, \quad (1)$$

$$B = 3C. \quad (2)$$

Умножим обе части равенства (2) на 2, получим: $2B = 6C$.

$$\text{В неравенстве (1) заменим } 2B \text{ на равное выражение } 6C, \text{ получим: } M > 6C. \quad (3)$$

$$\text{Стакан сока не бесплатный, значит, } 0 < C. \quad (4)$$

Вычтем из неравенства (3) неравенство (4). Это можно сделать, так как неравенства противоположных знаков. Сохранится знак неравенства (3): $M - 0 > 6C - C$, или $M > 5C$.

Значит, мороженое дороже, чем 5 стаканов сока.

Ответ: мороженое.

4. Решение.

Пусть K – цена одной книги в копейках. Так как копейка – наименьшая денежная единица, то K – целое число.

По условию задачи:

$$1100 < 9K < 1200, 1500 < 13K < 1600.$$

Разделим первое неравенство на 9, второе на 13, получим:

$$1100/9 < K < 1200/9, 1500/13 < K < 1600/13.$$

$$122^{2/9} < K < 133^{1/3}, 115^{5/13} < K < 123^{1/13}.$$

Из обоих неравенств следует, что $122^{2/9} < K < 123^{1/13}$.

Единственное целое число, которое удовлетворяет этому неравенству – это $K=123$.

Значит, книга стоит 123 коп., или 1 руб. 23 коп.

Ответ: 1 руб. 23 коп.

5. Решение.

Пусть $O, K, П, С$ и A – масса Оли, Кости, Паши, Саши и Ани соответственно.

По условию задачи:

$$O+K > П+С, \quad (1)$$

$$O+A < С. \quad (2)$$

Прибавим к обеим частям неравенства (1) число A , получим:

$$O+K+A > П+С+A \quad (3)$$

Вычтем из неравенства (3) неравенство (2). Это можно сделать, так как неравенства противоположных знаков. Сохранится знак неравенства (3):

$$O+K+A-O-A > П+С+A-C, \text{ или } K > П+A.$$

Значит, Костя перевесит Пашу с Аней.

Ответ: Костя.

6. Решение.

Пусть $K, З, Г$ и $Ж$ – масса красного, зеленого, голубого и желтого кубика соответственно.

По условию задачи:

$$K+Г = З+Ж, \quad (1)$$

$$K+З < Ж+Г, \quad (2)$$

$$З+Г > K+Ж. \quad (3)$$

Сложим неравенство (2) и равенство (1), получим:

$$K+З+K+Г < Ж+Г+З+Ж, \text{ или } 2K+З+Г < 2Ж+Г+З.$$

Вычтем из обеих частей полученного неравенства $Г+З$, получим: $2K < 2Ж$.

Разделим обе части полученного неравенства на 2, получим: $K < Ж$. (5)

Снова сложим неравенство (2) и равенство (1), но теперь в равенстве левую и правую часть поменяем местами, получим:

$K+3+3+Ж < Ж+Г+3+Ж$, или $23+К+Ж < 2Г+К+Ж$.

Вычтем из обеих частей полученного неравенства $К+Ж$, получим: $23 < 2Г$.

Разделим обе части полученного неравенства на 2, получим: $3 < Г$. (6)

Теперь сложим неравенство (3) и равенство (1), получим:

$3+Г+К+Г > К+Ж+3+Ж$, или $2Г+3+К > 2Ж+3+К$.

Вычтем из обеих частей полученного неравенства $3+К$, получим: $2Г > 2Ж$.

Разделим обе части полученного неравенства на 2, получим: $Г > Ж$. (7)

Из неравенстве (5), (6) и (7), следует, что красный кулик легче желтого, а желтый и зеленый легче голубого. Значит, голубой кубик – самый тяжелый.

Ответ: голубой.

7. Решение.

Пусть $Я$ – это цена яблока, $Г$ – это цена груши.

По условию задачи, $Я < Г$.

Умножим обе части этого неравенства на 5, получим: $5Я < 5Г$.

Прибавим к правой части неравенства $Г$, неравенство сохранится: $5Я < 5Г+Г = 6Г = 2*3Г$.

Таким образом, 5 яблок стоят меньше, чем 2 раза по 3 груши. Значит, 5 яблок не могут быть дороже 3 груш в 2 или более раз.

Ответ: не могут.

8. Решение.

Пусть в коробке было $2n$ пакетиков чая, а каждая девочка взяла по n пакетиков. Каждая девочка могла заварить от $2n$ до $3n$ стаканов чая. То есть $2n \leq 57 \leq 3n$ и $2n \leq 83 \leq 3n$.

Отсюда получаем, что $2n \leq 57$ и $3n \geq 83$, или $n \leq 28^{1/2}$ и $n \geq 27^{2/3}$.

Так как n – целое число, то единственное n , которое удовлетворяет неравенствам, равно 28.

Тогда $2n = 28 * 2 = 56$.

Ответ: 56.

9. Решение.

Пусть $П$ – это поросенок, $К$ – это козленок, $Н$ – норма волка.

По условию задачи:

$$(1) 3П + 7К < Н$$

$$(2) 7П + К > Н$$

Из этих неравенств следует, что $3П + 7К < 7П + К$, или $6К < 4П$, или $3К < 2П$.

Так как $3К < 2П < 3П$, то $К < П$.

Так как $3К < 2П$ и $К < П$, то $3К+К < 2П+П$, то есть $4К < 3П$.

Так как $4К < 3П$, то из (1) получаем, что $3П + 7К > 4К + 7К = 11К$.

Так как $11К < 3П + 7К < Н$, то, съев 11 козлят, волк будет страдать от голода.

Ответ: от голода.

10. Решение.

Пусть ФЖ, ФМ, РЖ, РМ – количество денег у французских женщин, французских мужчин, русских женщин, русских мужчин соответственно.

По условию задачи:

$$(1) \text{ ФЖ} + \text{ФМ} > \text{РЖ} + \text{РМ}$$

$$(2) \text{ ФЖ} + \text{РЖ} > \text{ФМ} + \text{РМ}$$

Сложим (1) и (2), получим:

$$\text{ФЖ} + \text{ФМ} + \text{ФЖ} + \text{РЖ} > \text{РЖ} + \text{РМ} + \text{ФМ} + \text{РМ}$$

Вычтем из обеих частей неравенства $\text{ФМ} + \text{РЖ}$, получим:

$$\text{ФЖ} + \text{ФЖ} > \text{РМ} + \text{РМ}, \text{ или } \text{ФЖ} > \text{РМ}.$$

То есть количество денег у французских женщин больше количества денег у русских мужчин, а значит, $\text{ФЖ} > 0$. Значит, на встрече обязательно была француженка.

Ответ: обязательно.

11. Доказательство.

Пусть Аня изрисовала x листочков, тогда Саня изрисовал не меньше $x+1$ листочков, а Ваня – не меньше $x+(x+1)+1=2x+2$ листочков.

Так как на каждом листочке Ваня нарисовал не меньше 1 котика, то он нарисовал не меньше $2x+2$ котиков. Тогда Саня нарисовал не меньше $2x+3$ котиков, а Аня – не меньше $(2x+2)+(2x+3)+1=4x+6$ котиков.

Так как на каждом листочке помещается не больше 5 котиков, а Аня изрисовала x листочков, то она нарисовала не больше $5x$ котиков. С другой стороны, она нарисовала не меньше $4x+6$ котиков, то $4x+6 \leq k \leq 5x$, где k – количество котиков, нарисованных Аней. Значит, $4x+6 \leq 5x$. Отсюда получаем, что $x \geq 6$.

Доказано.

Домашнее задание 13.

Решение.

Пусть Р, Ч, С и К – вес рюкзака, чемодана, саквояжа и корзины соответственно.

По условию задачи:

$$(1) \text{ Ч} > \text{Р}$$

$$(2) \text{ С} + \text{Р} > \text{Ч} + \text{К}$$

$$(3) \text{ К} + \text{С} = \text{Ч} + \text{Р} \text{ или, что то же самое, } (4) \text{ Ч} + \text{Р} = \text{К} + \text{С}$$

Сложим (2) и (3), затем вычтем из обеих частей неравенства $\text{К} + \text{Р}$ и разделим на 2, получим:

$$\text{С} + \text{Р} + \text{К} + \text{С} > \text{Ч} + \text{К} + \text{Ч} + \text{Р}$$

$$2С > 2Ч$$

$$С > Ч$$

Сложим (2) и (4), затем вычтем из обеих частей неравенства $С+Ч$ и разделим на 2, получим:

$$С+Р+Ч+Р > Ч+К+К+С$$

$$2Р > 2К$$

$$Р > К$$

Таким образом, $С > Ч > Р > К$.

Ответ: саквояж, чемодан, рюкзак, корзина.