Занятие номер	Класс	Тема
12	7 база	Деревья.

1. Доказательство.

Построим граф, где вершины – это станции метро, ребра – перегоны между двумя станциями. Так как из любой вершины этого графа есть единственный маршрут в любую другую, то этот граф – дерево.

Так как этого граф – дерево, то в нем есть висячая вершина. Эту вершину можно удалить из графа вместе с ребром, выходящим из нее (это и будет закрытая станция метро). Связность графа не нарушится, он останется деревом. То есть в нем по-прежнему будет единственный маршрут из любой вершины в любую другую.

Доказано.

2. Доказательство.

Дерево – это связный граф без циклов. Так как в нем нет никаких циклов, то нет и нечетных циклов. Так как в нем нет нечетных циклов, то этот граф двудольный.

Доказано.

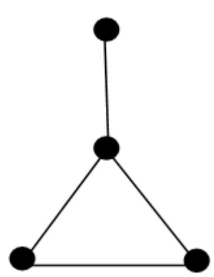
3. Доказательство.

а) Рассмотрим связный граф.

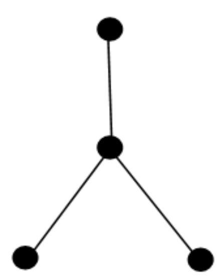
Если в нем нет циклов, то этот граф – дерево и он сам является своим остовом.

Если в графе есть цикл, то удалим из этого цикла любое ребро (разомкнем этот цикл). Граф останется связным, так как при удалении ребра между вершинами A и B цикла останется путь между A и B по другой части цикла. Если в графе есть еще циклы, то разомкнем каждый из них, удалив по одному ребру. Так как связность графа при этом не нарушается, после этих действий получится связный граф без циклов, то есть дерево. Так как это дерево имеет те же вершины, что и исходный граф, то оно является остовом исходного графа.

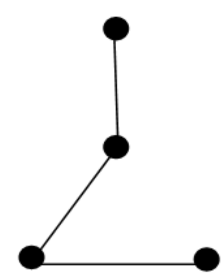
б) Да, может. Например:



Граф



Остов1



Остов2

Доказано.

4. Решение.

Построим граф, где вершины – это города, ребра – дороги между двумя городами. Так как любые две вершины этого графа соединяет единственный путь, то этот граф – дерево.

Так как этот граф – дерево, то в нем ребер на 1 меньше, чем вершин. Так как вершин в этом графе 79, то ребер 79-1=78. Значит, в этой стране 78 дорог.

Ответ: 78 дорог.

5. **Решение.**

Построим граф, где вершины – это города, ребра – дороги между двумя городами. Пусть в этом графе n вершин. Степень вершины, соответствующей столице, равна n-1, степени ее соседей по кольцу равны 2, а степени всех остальных вершин – 3. Сумма степеней вершин в этом графе равна n-1+2+2+3*(n-3)=4n-6. Тогда количество ребер равно (4n-6):2=2n-3.

Допустим, что можно разделить дороги между двумя компаниями, как указано в условии задачи. Раскрасим ребра, принадлежащие одной компании в синий цвет, ребра, принадлежащие другой компании, - в красный цвет. По условию задачи граф с синими ребрами связен и граф с красными ребрами связен. Так как в каждом из этих графов по n вершин, то наименьшее количество ребер в каждом из них равно n-1. Тогда всего в графе не меньше 2*(n-1)=2n-2 ребер. А это противоречит тому, что в графе 2n-3 ребер.

Значит, предположение неверно, и разделить дороги между двумя компаниями, как указано в условии задачи, нельзя.

Ответ: нельзя.

6. Доказательство.

Рассмотрим связный граф.

Если в нем нет циклов, то этот граф – дерево и в нем есть висячая вершина. Эту вершину можно удалить из графа вместе с выходящим из нее ребром. При этом граф останется связным, так как удаленное ребро участвовало в маршрутах из других вершин графа только в удаленную вершину. Маршруты между каждыми двумя оставшимися вершинами графа остались без изменений.

Если граф не является деревом, то он имеет остов. Построим остов, удалив из графа некоторые ребра. Остов – это дерево и в нем есть висячая вершина. Удалим эту вершину из остова вместе с выходящим из нее ребром. Как мы уже доказали выше, остов останется связным. Затем вернем все удаленные ребра исходного графа, кроме ребер, выходивших из удаленной вершины. Добавление ребер к связному графу не нарушает его связность. Получим исходный граф, в котором удалена одна вершина вместе с выходящими из нее ребрами, при этом граф остался связным.
Доказано.

7. Решение.

а) В дереве с 4 вершинами всего 4-1=3 ребра. Сумма степеней вершин в таком дереве равна 3*2=6. Наибольшая степень вершины в графе с 4 вершинами равна 3. Наименьшая степень вершины в связном графе равна 1, и в любом дереве есть хотя бы две вершины степени 1.

Число 6 можно представить в виде суммы четырех чисел, не меньших 1 и не больших 3, чтобы среди них было хотя бы два числа 1, только так:
6=3+1+1+1

6=2+2+1+1

Этим двум наборам степеней вершин соответствуют такие деревья:

Остальные деревья будут им изоморфны.

б) В дереве с 5 вершинами всего 5-1=4 ребра. Сумма степеней вершин в таком дереве равна 4*2=8. Наибольшая степень вершины в графе с 5 вершинами равна 4. Наименьшая степень вершины в связном графе равна 1, и в любом дереве есть хотя бы две вершины степени 1.

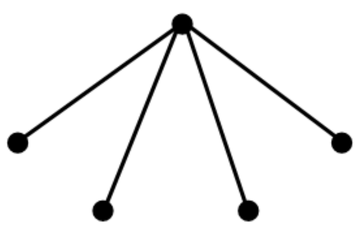
Число 8 можно представить в виде суммы в виде суммы пяти чисел, не меньших 1 и не больших 4, чтобы среди них было хотя бы два числа 1, только так:

8=4+1+1+1+1

8=3+2+1+1+1

8=2+2+2+1+1

Этим трем наборам степеней вершин соответствуют такие деревья:



Остальные деревья будут им изоморфны.

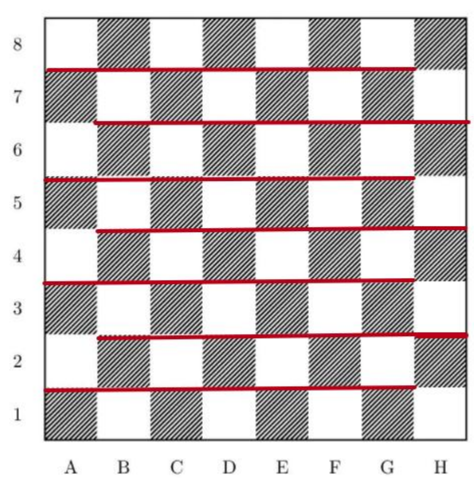
Ответ: см. решение.

8. **Решение.**

Построим граф, где вершины – это клетки доски, ребрами соединим вершины, если соответствующие клетки имеют общую сторону, не перекрытую спичкой. В этом графе 64 вершины и изначально в нем 0 ребер. Удаление спички с доски означает, что мы провели ребро между соответствующими вершинами в графе.

Если из каждой вершины графа можно добраться в каждую, то граф связен. Наименьшее количество ребер в связном графе с 64 вершинами равно 64-1=63. Значит, нужно добавить в граф не менее 63 ребер, то есть убрать с доски не менее 63 спичек.

Убрать 63 спички можно, например, так:



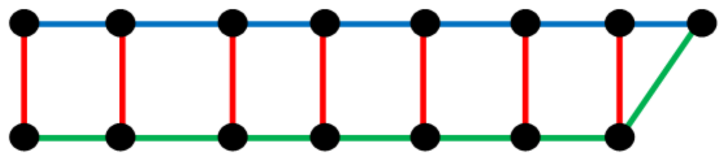
Теперь из каждой клетки можно добраться в каждую, не перепрыгивая через спички.

Ответ: 63 спички.

9. Решение.

Построим граф, где вершины – это города, ребра – авиалинии между двумя городами. Раскрасим ребра, принадлежащие одной компании, в один цвет. Получим граф с ребрами трех цветов. По условию задачи, если из графа удалить ребра одного цвета, то граф с ребрами оставшихся двух цветов останется связным. Наименьшее количество ребер в связном графе с 15 вершинами равно 15-1=14.
Таким образом, в графе ребер первого и второго цвета не меньше 14, второго и третьего цвета – не меньше 14, первого и третьего цвета – не меньше 14. То есть удвоенное количество всех ребер трех цветов – не меньше чем 14+14+14=42. Значит, ребер в графе (авиалиний в стране) не меньше 42:2=21.

Например, эти авиалинии могут соединять города так:



Ответ: 21 авиалиния.

Домашнее задание 12.

Решение.

Построим граф, где вершины – это города, ребра – дороги между двумя городами. Так как каждая вершина соединена с каждой, то в этот граф полный, и в нем 47*46:2=1081 ребро.

Наименьшее количество ребер в графе с 47 вершинами, при котором он остается связным, равно 47-1=46. Значит, наибольшее количество ребер, которое можно удалить из полного графа без потери связности равно 1081-46=1035. То есть на ремонт можно закрыть не более 1035 дорог.

Ответ: 1035 дорог.