

Занятие номер	Класс	Тема
12	7 профи	Принцип Дирихле. Часть 2.

1. Доказательство.

Расположим все числа в ряд по возрастанию. Произведение первых семи чисел в этом ряду больше 1. Значит, среди них найдется число большее 1.

Тогда числа с 8-го по 1976-е в этом ряду тоже больше 1. Значит, произведение первых восьми и остальных чисел (а значит, всех 1976 чисел) больше 1.

Доказано.

2. Решение.

а) Рассмотрим число 11. Для него и любого другого числа разность большего и меньшего из них – не больше 10. Значит, нельзя расставить числа так, чтобы разность любых двух соседних была не меньше 11.

б) Пусть числа расставлены так:

1 12 2 13 3 14 4 15 5 16 6 17 7 18 8 19 9 20 10 21 11

В этом случае для каждой пары соседних чисел разность большего и меньшего не меньше 10.

в) Расставим числа так:

1 8 15 2 9 16 3 10 17 4 11 18 5 12 19 6 13 20 7 14 21.

В этом случае для каждой пары чисел, стоящих через одно, разность большего и меньшего – не меньше 6. Большую разность получить нельзя, поскольку числа от 1 до 7 должны стоять через два, а где-то между ними есть 8.

Ответ: а) не могли, б) могли, в) $k=6$.

3. Решение.

Найдем наименьшее n , для которого можно построить контрпример. Рассмотрим 8 самых заселенных клеток. Если в них не более 30 кроликов, то в самой маленькой из них не более 3 (иначе кроликов не менее $4 \cdot 8 = 32$, что противоречит тому, что их 30). Значит, и в остальных клетках, кроме этих восьми, не более чем по 3 кролика, а всего в них не менее $450 - 30 = 420$ кроликов. То есть, кроме самой большой восьмерки клеток, есть еще не менее $420 : 3 = 140$ клеток. Значит, при $140 + 8 = 148$ и более клетках зоотехник не смог бы сказать свое утверждение.

Ответ: 147.

4. Доказательство.

Всего была сыграно $14 \cdot 13 : 2 = 91$ игра. Ничьих не было, значит, всего в сумме семи

командами была одержана 91 победа.

Команд было 14, значит, каждая команда выиграла в среднем $91:14=6,5$ игр. Так как каждая команда выиграла целое количество игр, то найдется команда А, которая выиграла хотя бы 7 игр. Исключим из рассмотрения эту команду и 7 побежденных ею команд.

Осталось 6 команд сыграли между собой $6*5:2=15$ игр, значит, каждая команда в среднем выиграла $15:6=2,5$ игры. Так как каждая команда выиграла целое количество игр, то найдется команда В, которая выиграла хотя бы 3 игры. Исключим из рассмотрения эту команду и 3 побежденных ею команды.

Осталось 2 команды, которые сыграли между собой 1 игру. Так как ничьих не было, то одна из этих команд (команда С) выиграла у другой. Команды А, В и С составляют искомую тройку команд. Все остальные команды проиграли хотя бы одной из них.

Доказано.