Занятие номер	Класс	Тема
13	6 профи	Зацикливания.

1. Доказательство.

а) Выберем какую-нибудь точку и будем переходить, начиная с нее, по стрелкам в другие точки. Так как точек конечное число, то найдется такая точка, из которой по стрелке мы перейдем в одну из уже посещенных точек. Действительно, если такой точки нет, то есть из каждой точки стрелка ведет в точку, в которой мы еще не были, то из последней точки не выходит ни одной стрелки, что противоречит условию.

Итак, при указанном обходе точек, найдется такая точка (назовем ее А), из которой мы по стрелке перейдем в одну из уже посещенных точек (назовем ее В). А так как из каждой точки выходит ровно одна стрелка, то с этого момента мы будем повторять путь по стрелкам от точки В через точку А снова в точку В, то есть начнем ходить по циклу.

б) Выберем любую точку (назовем ее С) и будем переходить, начиная с нее, по стрелкам в другие точки. Как мы доказали выше, найдется такая точка А, из которой мы перейдем в уже посещенную точку В. Если точки В и С не совпадают, то в точку В ведет две стрелки – одна, по которой мы попали в точку В, идя из начальной точки С, другая из точки А. А это противоречит условию, что в каждую точку ведет ровно одна стрелка. Значит, точки В и С совпадают, и из точки А мы попадем в начальную точку С.

Доказано.

2. **Решение.**

а) Так как Петя на каждом ходе записывает двузначное число или однозначное число в виде $\overline{0a}$, а различных однозначных и двузначных чисел всего 100, то не позже, чем через 100 ходов (с учетом первого числа будет написано 101 число) на доске повторится какое-нибудь из уже записанных чисел. Так как Петя производит одни и те же операции, то, начиная с этого числа, повторится вся последовательность чисел до тех пор, пока снова не будет получено это же число, то есть последовательность зациклится.

б) Неверно.

Например, если начальное число – 23, то последовательность будет такой: 23, 15, 38, 65, 65, 65, 65, … Далее будут повторяться числа 65, и начальное число 23 больше не появится на доске.

Ответ: а) доказано, б) неверно.

3. Доказательство.

а) Всего из трех цифр можно составить 10*10*10=1000 различных комбинаций. Так как комбинаций конечное число, то рано или поздно мы получим комбинацию, которая уже была получена, и с этого момента все последующие цифры последовательности будут повторяться до тех пор, пока снова не будет получена та же комбинация из трех цифр. Это значит, что последовательность зациклится, эта комбинация из трех цифр встретится бесконечное число раз.

б) Заметим, что в ряду из n цифр содержится ровно n-2 комбинаций из трех идущих подряд цифр: это цифры с номерами 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, … (n-2)-(n-1)-n.

Рассмотрим первые 1003 цифры последовательности. Допустим, что среди них нет ни одной повторяющейся комбинации из трех цифр. Так как различных комбинаций из трех цифр не более 1000, то рассматриваемых цифр не более 1002. А их на самом деле 1003. Значит, предположение неверно, и среди первых 1003 цифр последовательности найдется повторяющаяся комбинация из трех цифр.

в) Представим всю последовательность в виде ориентированного графа, в котором вершины соответствуют тройкам идущих подряд цифр последовательности ((1, 1, 4), (1, 4, 6), (4, 6, 1) и т. д.). Стрелкой соединим две соседние вершины, то есть вершины, соответствующие двум последовательным тройкам цифр последовательности.

По указанному в условии правилу каждая цифра последовательности, начиная с четвертой, однозначно определяется предыдущими тремя последовательными цифрами, а значит, каждая последующая тройка цифр однозначно определяется предыдущей тройкой. Например, после тройки (3, 5, 8) следующая цифра будет 6 (так как 3+5+8=16, берем последнюю цифру), а следующая тройка – (5, 8, 6). То есть из каждой вершины графа стрелка ведет ровно в одну вершину.

Кроме того, для любой тройки последовательных цифр (начиная со второй тройки), можно однозначно определить цифру, стоящую перед этой тройкой, а значит, и предыдущую тройку цифр. Например, перед тройкой (3, 5, 8) стоит цифра 0 (так как 0+3+5=8), а предыдущая тройка – это (0, 3, 5). Значит, в каждую вершину графа входит стрелка ровно из одной вершины.

Таким образом, в графе в каждую вершину входит ровно 1 стрелка, и из каждой вершины выходит ровно 1 стрелка. Как было доказано в задаче 1(б), начав из вершины (1, 1, 4) и двигаясь по стрелкам, мы рано или поздно снова попадем в вершину (1, 1, 4), после чего этот путь по стрелкам будет повторяться много раз (зациклится). То есть в указанной последовательности тройка (1, 1, 4) встретится бесконечное число раз.

Доказано.

4. Решение.

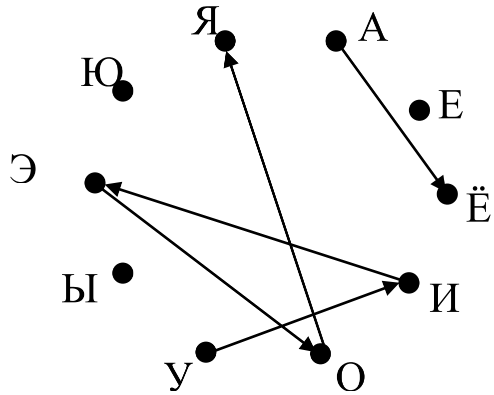
а) Пусть дан текст длиной n букв. При замене букв шифром, мы будем получать тексты, так же состоящие из n букв. При указанном правиле шифрования из каждой комбинации длиной n букв зашифрованная комбинация определяется единственным образом. Аналогично, зная однократно зашифрованную комбинацию, можно однозначно восстановить исходную комбинацию.

Если изобразить каждую комбинацию из n букв точкой, а переход от комбинации к комбинации, полученной однократной заменой букв, стрелкой, то получим, что из каждой точки выходит ровно 1 стрелка, и в каждую точку входит ровно 1 стрелка. Так как комбинаций из n букв конечное число (всего 10^n), то, как было доказано в задаче 1(б), начав с некоторой исходной комбинации (исходного текста) и переходя по стрелкам (применяя алгоритм замены букв), мы рано или поздно вернемся к исходной комбинации (получим исходный текст).

б) Изобразим правило замены букв в виде ориентированного графа, в котором вершины – это буквы, а стрелки ведут от букв к их шифровкам. Получим граф с 10 вершинами, в каждую вершину входит и из каждой вершины выходит по 1 стрелке. Как было доказано в задаче 1(б), начав двигаться по стрелкам из любой буквы, мы через несколько ходов вернемся в нее. То есть каждая вершина графа включена в некоторый цикл (замкнутый путь из последовательных стрелок). Если цикл имеет длину k (состоит из k стрелок), то, начав двигаться из любой вершины этого цикла, мы вернемся в нее через k, 2k, 3k и т. д. ходов (ход – это переход по одной стрелке), то есть через число ходов, кратное длине цикла.

Так как в графе 10 вершин, то наибольшая длина цикла равна 10. Циклов длины 1 и 9 в графе не может быть по условию задачи (каждая буква зашифровывается *другой* буквой). Значит, полученный граф может включать циклы длины 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10. Мы не знаем, циклы какой длины содержит граф, но можем сказать, что через НОК(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10)=840 ходов в любом из циклов мы вернемся в начальную вершину. Соответственно, если мы будем расшифровывать некоторый текст, то проделав с ним алгоритм шифрования 840 раз, мы снова вернемся к этому же тексту. Это значит, что после предыдущего 839 хода мы получим расшифрованный текст.

в) Если слово АИУЭО после однократного применения алгоритма шифрования превратилось в ЁЭИОЯ, то часть алгоритма шифрования можно изобразить так:



Как мы видим, буквы У, И, Э, О и Я принадлежат одному циклу, буквы А и Ё – тоже одному циклу.

Чтобы слово ЁЭИОЯ превратилось в слово АУЮИЭ, нужно, чтобы буква Ю тоже была в том же цикле, что и У, И, Э, О, Я. А вот буквы А и Ё не должны принадлежать тому же циклу, что и У, И, Э, О, Я, Ю, так как А предшествует Ё, а Э не предшествует У, И не предшествует Ю и т. д. То есть А для Ё – это предыдущая буква, а Э, И О и Я – это не предыдущие буквы для У, Ю, И, Э. Соответственно, попасть из Ё в А и, например, из Э в У за одинаковое число ходов невозможно.

Итак, возможны такие варианты циклов:

1) В графе три цикла: У-И-Э-О-Я-Ю, А-Ё и Ы-Е. Длина первого цикла – 6, длина второго – 2. Перейти из ЭИОЯ в УЮИЭ можно за 4+6k ходов (k=0, 1, 2 …), то есть *четное* количество ходов, из Ё в А – за *нечетное* количество ходов. Таким образом, в этом случае получить из слова ЁЭИОЯ слово АУЮИЭ невозможно.

2) В графе два цикла: У-И-Э-О-Я-Ю и А-Ё-Ы-Е (или А-Ё-Е-Ы). Длина первого цикла – 6, длина второго – 4. Перейти из ЭИОЯ в УЮИЭ можно за 4+6k ходов (k=0, 1, 2 …), то есть *четное* количество ходов, из Ё в А – за 3+4n ходов (n=0, 1, 2 …), то есть за *нечетное* количество ходов. Таким образом, в этом случае получить из слова ЁЭИОЯ слово АУЮИЭ невозможно.

3) В графе два цикла: У-И-Э-О-Я-Ю-Ы и А-Ё-Е (или У-И-Э-О-Я-Ю-Е и А-Ё-Ы, или У-И-Э-О-Я-Ю-Ы-Е и А-Ё, или У-И-Э-О-Я-Ю-Е-Ы и А-Ё, то есть все варианты, когда в цикл У-И-Э-О-Я-Ю добавляем 1 или 2 буквы между Ю и У). В этом случае получить из слова ЁЭИОЯ слово АУЮИЭ невозможно, так как перейти, например, из Э в У за одно число шагов, а из И в Ю – за другое (меньшее) число шагов. Значит, добавлять буквы в цикл У-И-Э-О-Я-Ю нужно между Я и Ю.

4) В графе два цикла: У-И-Э-О-Я-Ы-Ю и А-Ё-Е (или У-И-Э-О-Я-Е-Ю и А-Ё-Ы). Длина первого цикла – 7, длина второго – 3. Перейти из ЭИОЯ в УЮИЭ можно за 5+7k ходов (k=0, 1, 2 …), из Ё в А – за 2+3n ходов (n=0, 1, 2 …).

   Выясним, при каких k и n количество ходов в обоих циклах совпадет. Для этого решим уравнение 5+7k=2+3n, или 3n=3+7k. Отсюда видно, что выражение 3+7k должно делиться на 3, а для этого 7k должно делиться на 3. Это возможно при k=0, 3, 6, 9…, то есть при k, делящемся на 3. При k=0, 3, 6, 9, … получаем, что n=1, 8, 15, 22, …, а количество ходов в обоих циклах, при которых из слова ЁЭИОЯ получается слово АУЮИЭ, равно 5, 26, 47, 68, …, то есть 5+21m, где m=0, 1, 2, ….

5) В графе два цикла: У-И-Э-О-Я-Ы-Е-Ю (или У-И-Э-О-Я-Е-Ы-Ю) и А-Ё. Длина первого цикла – 8, длина второго – 2. Перейти из ЭИОЯ в УЮИЭ можно за 6+8k ходов (k=0, 1, 2 …), то есть за *четное* количество ходов, из Ё в А – за 1+2n ходов (n=0, 1, 2 …), то есть за *нечетное* количество ходов. Таким образом, в этом случае получить из слова ЁЭИОЯ слово АУЮИЭ невозможно.

Мы рассмотрели все варианты и выяснили, что получить из слова ЁЭИОЯ слово АУЮИЭ можно только в случае, если алгоритм шифрования такой: А→Ё, Ё→Е (или Ё→Ы), Е→А (или Ы→А), У→И, И→Э, Э→О, О→Я, Я→Ы (или Я→Е), Ы→Ю (или Е→Ю), Ю→У. Получить из одного слова другое можно за 5+21m ходов, где m=0, 1, 2 ….

Ответ: а) доказано, б) 839 раз, в) можно, за 5+21m, где m=0, 1, 2, ….

5. Доказательство.

Текущее состояние описанной в задаче системы определяется количеством шариков в каждой коробочке и указанием коробочки, с которой нужно начинать раскладывать шарики в следующий раз. Поэтому возможных состояний системы конечное число. Из каждого состояния можно, раскладывая шарики, перейти в другое состояние системы, которое определено однозначно. Наоборот, зная состояние системы в настоящий момент, можно однозначно определить состояние системы перед последним раскладыванием шариков. Действительно, последнее раскладывание должно было закончиться на выделенной коробочке; поэтому, чтобы восстановить предыдущее состояние, нужно взять один шарик из выделенной коробочки и далее, идя против часовой стрелки, брать по шарику из каждой коробочки, пока это возможно. Когда же мы встретим пустую коробочку, мы положим в неё все собранные шарики и объявим её отмеченной. Если обозначить состояния системы точками, а возможность перехода из одного состояния в другое – стрелкой, соединяющей соответствующие точки (то есть построить граф состояний системы), то из каждой точки будет выходить ровно одна стрелка, и в каждую точку будет входить ровно одна стрелка. Как мы доказали в задаче 1(б), в некоторый момент система вернется в первоначальное состояние, то есть повторится начальное расположение шариков.

Доказано.