Занятие номер	Класс	Тема
13	6 база	Признаки делимости. Часть 1.

1. Решение.

Чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 0 или 5. Чтобы число делилось на 9, сумма его цифр должна делиться на 9.

Если число оканчивается на 0, получаем *970. Сумма имеющихся цифр равна 9+7+0=16. Перебрав цифры от 1 до 9, получим, что первая цифра должна быть 2, так как только в этом случае сумма цифр 2+9+7+0=18 делится на 9. Таким образом, если число оканчивается на 0, то это число 2970.

Если число оканчивается на 5, получаем *975. Сумма имеющихся цифр равна 9+7+5=21. Перебрав цифры от 1 до 9, получим, что первая цифра должны быть 6, так как только в этом случае сумма цифр 6+9+7+5=27 делится на 9. Таким образом, если число оканчивается на 5, то это число 6975.

Ответ: 2970 и 6975.

2. Решение.

Пусть женщин в селе 1 часть, тогда мужчин – 4 таких части, а все жители села – это 5 одинаковых частей. Значит, общее количество жителей села делится на 5, и не может быть равно 897, так как 897 не делится на 5.

Ответ: нет.

3. Доказательство.

Заметим, что каждое слагаемое суммы представляет собой произведение трех последовательных чисел. Среди любых трех последовательных чисел обязательно есть такое, которое делится на 3. Значит, в каждом слагаемом есть число, делящееся на 3, и, следовательно, каждое слагаемое делится на 3. Тогда и вся сумма в левой части неравенства делится на 3.

Число 19891988 не делится на 3, так как сумма его цифр не делится на 3. Значит, сумма в левой части неравенства не может быть равна числу в правой части неравенства, что и требовалось доказать.

Доказано.

4. Доказательство.

По признаку делимости на 11, число ДДЕЕ делится на 11.
Числа АВ и БГ не делятся на 11, так как состоят из разных цифр, а двузначные числа, делящиеся на 11, состоят из одинаковых цифр.

Число 11 – простое число. Если АВ не делится на 11 и БГ не делится на 11, то АВ*БГ не делится на 11. Значит, это произведение не может быть равно ДДЕЕ.

Доказано.

5. Решение.

Если число a больше некоторого числа (последней цифры) b в 5 раз, то $a=5 \cdot b$, то есть a делится на 5. Значит, это число заканчивается цифрой 0 или цифрой 5.

Если последняя цифра 0, то искомое число – $0 \cdot 5=0$, но 0 – не натуральное число, поэтому не является решением.

Если последняя цифра 5, то искомое число – $5 \cdot 5=25$.

Получили единственное натуральное число, удовлетворяющее условию, - число 25.

Ответ: 25.

6. Решение.

Число делится на 4, если две последние цифры образуют двузначное число, делящееся на 4. Перебрав все возможные двузначные числа, состоящие из двоек и троек, получим, что на 4 делится только число 32. Значит, искомый код должен заканчиваться на 32.

Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Учитывая, что последние две цифры – это 32, и двоек больше, получим, что сумма цифр семизначного числа не меньше 2+2+2+2+2+3+2=15 и не больше 2+2+2+3+3+3+2=17. На 3 делится только сумма цифр, равная 15.

Значит, искомый код состоит из шести цифр 2 и одной цифры 3, причем заканчивается на 32. Единственный подходящий вариант кода – 2222232.

Ответ: 2222232.

7. Решение.

Так как цифр всего 10, то это число будет десятизначным.

Чтобы оно делилось на 11, нужно, чтобы разность суммы цифр на нечетных местах и суммы цифр на четных местах делилась на 11 (знакопеременная сумма цифр делилась на 11).

Сумма цифр от 0 до 9 равна 45. Нужно разбить эту сумму на 2 числа так, чтобы разность их была кратна 11. Это могут быть числа 28 и 17 или 39 и 6.

Теперь нужно составить число так, чтобы сумма цифр на нечетных местах была, например, 28, а на четных – 17 (заметим, что для 39 и 6 такое число придумать не удастся). Например, это может быть число **9**1**8**27**3**4**5**0**6**.

Ответ: см. решение.

Домашнее задание 13.

1. Решение.

Чтобы число делилось на 15, оно должно делиться на 3 и на 5.

Чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 0 или 5. Чтобы число делилось на 3, сумма его цифр должна делиться на 3.

Если число оканчивается на 0, получаем *150. Сумма имеющихся цифр равна 1+5+0=6. Перебрав цифры от 1 до 9, получим, что первая цифра должна быть 3, 6 или 9, так как только в этом случае сумма цифр числа делится на 3. Таким образом, если число оканчивается на 0, то это число 3150, 6150 или 9150.

Если число оканчивается на 5, получаем *155. Сумма имеющихся цифр равна 1+5+5=11. Перебрав цифры от 1 до 9, получим, что первая цифра должны быть 1, 4 или 7, так как только в этом случае сумма цифр числа делится на 3. Таким образом, если число оканчивается на 5, то это число 1155, 4155 или 7155.

Ответ: 3150, 6150, 9150, 1155, 4155, 7155.

2. **Доказательство.**

Сумма цифр этого числа равна 21. Заметим, что знакопеременная сумма цифр не больше обычной суммы цифр и имеет ту же четность. Чтобы число делилось на 11, нужно, чтобы его знакопеременная сумма цифр делилась на 11. Для числа, составленного из цифр от 1 до 6, знакопеременная сумма цифр будет нечетной и не больше 21. Значит, чтобы это число делилось на 11, нужно, чтобы знакопеременная сумма цифр была равна 11.

Допустим, что число, составленное из цифр от 1 до 6, делится на 11. Тогда все его цифры можно разбить на две группы по 3 цифры, сумма цифр в которых будет отличаться на 11. Так как сумма всех шести цифр равна 21, то в одной группе сумма цифр будет равна (21-11):2=5, в другой – 5+11=16. Как видим, сумма любых трех цифр этого числа больше 5. Значит, разбить цифры на группы указанным образом невозможно. Значит, шестизначное число, составленное из цифр от 1 до 6, не делится на 11.

Доказано.

6 база. Признаки делимости. Часть 2.

1. **Решение.**

Сумма цифр числа 593421 равна 24, 24 делится на 3. Значит, число 593421 делится на 3.

При умножении этого числа на 2 (вообще, на любое целое число) мы снова получим число, делящееся на 3 (если один из множителей делится на 3, то и произведение делится на 3).

Если число, делящееся на 3, записать теми же цифрами в обратном порядке, то получим число, делящееся на 3, так как сумма цифр останется прежней и будет делиться на 3.

Таким образом, после того, как мы сложим исходное число, умноженное на 2, и число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, мы получим снова число, делящееся на 3.

Так как на каждом шаге мы повторяем одни и те же действия, то каждый раз мы будем получать число, делящееся на 3. Кроме того, с каждым шагом числа увеличиваются (не может оказаться, что в результате получили 3). Значит, ни на каком шаге получить простое число невозможно.

Ответ: не могло.

2. Доказательство.

Признак делимости на 25: Число делится на 25 тогда и только тогда, когда двузначное число, образованное двумя последними цифрами числа, делится на 25.

Докажем это.

Представим число в виде $100*n + \overline{mk}$, где n – количество целых сотен в числе, $\overline{mk}$ – двузначное число, образованное двумя последними цифрами числа.

Число 100 делится на 25. Значит, 100*n делится на 25. Тогда, если $\overline{mk}$ делится на 25, то и само число, равное $100*n + \overline{mk}$, делится на 25. Обратно, если само число, равное $100*n + \overline{mk}$, делится на 25, то $\overline{mk}$ делится на 25 (иначе, если $\overline{mk}$ не делится на 25, то и $100*n + \overline{mk}$ не делится на 25).

Таким образом, $100*n + \overline{mk}$ делится на 25 тогда и только тогда, когда $\overline{mk}$ делится на 25. Это и требовалось доказать.

Доказано.

3. Решение.

Знакопеременная сумма числа АННА равна А-Н+Н-А=0, 0 делится на 11. Значит, число АННА делится на 11 и не может быть простым.

Число ЗЕРКАЛЬНЫЙ состоит из 10 различных цифр, то есть в этом числе использованы все цифры от 0 до 9. Сумма цифр от 0 до 9 равна 45, 45 делится на 3 и на 9. Значит, число ЗЕРКАЛЬНЫЙ делится на 3 и на 9 и не может быть простым.

Ответ: не может.

4. Решение.

В 19-значном числе 10 цифр стоят на нечетных местах и 9 цифр – на четных. Если мы сможем написать цифры так, что сумма цифр на 10 карточках будет отличаться от суммы цифр на оставшихся 9 карточках на 0, 11 или любое другое число, делящееся на 11, то мы сможем составить число, делящееся на 11.

Например, на 10 карточках можно написать цифру 2, на 9 карточках – цифру 1. Получим число 2121212121212121212, которое делится на 11 по признаку делимости на 11.

Ответ: можно.

5. Доказательство.

Рассмотрим число $\overline{A_1A_2A_3...A_n}$, где n – нечетное число. Пусть A_k – это цифра посередине этого числа. В числе, записанном теми же цифрами в обратном порядке, эта цифра тоже будет стоять посередине числа.

Тогда разность этого числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке равна $A_1A_2A_3...A_n – A_nA_{n-1}A_{n-2}...A_1$.

Разложим каждое число на разрядные слагаемые и сгруппируем слагаемые с одинаковыми коэффициентами. Получим:

$A_1(1000…0 – 1) + A_2(100…0 – 10) + A_3(10…0 – 100) + … + A_k(10…0 – 10..0) – … – A_{n-2}(10…0 – 100) – A_{n-1}(100…0 – 10) – A_n(1000…0 – 1)$.

В скобках при A_1 и A_n получим число, состоящее из n-1 цифр 9, в скобках при A_2 и A_{n-1} получим число, состоящее из n-3 цифр 9 и 0 на конце, в скобках при A_3 и A_{n-2} получим число, состоящее из n-5 цифр 9 и двух нулей на конце, …, в скобках при A_k получим 0.

Таким образом, в каждых скобках мы получаем число, состоящее из четного количества цифр 9 и нескольких нулей на конце. Все эти числа делятся на 9 и на 11 по признакам делимости. Значит, и все выражение делится на 9 и на 11. Так как 9 и 11 взаимно простые числа, то все выражение делится на 9*11=99.

Доказано.