Занятие номер	Класс	Тема
12	6 профи	Биекция. Часть 1

1. Решение.

Пусть M – множество способов включить в зале 5 светильников из 8. Пронумеруем светильники от 1 до 8. Тогда каждый способ включения 5 светильников можно представить в виде последовательности из 3 нулей и 5 единиц, где нуль на месте i означает выключенный светильник с номером i, единица на месте j означает включенный светильник с номером j. Таким образом, множество M – это множество всех последовательностей из 3 нулей и 5 единиц.

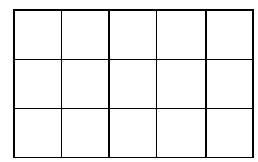
Пусть N – множество слов, которые можно получить из слова АХАХАХАА, переставляя в нем буквы.

Каждому элементу из множества M поставим в соответствие элемент из множества N, такой, в котором буквы Х стоят на тех местах в слове, что и нули в элементе из множества M, а буквы А – на тех местах в слове, что и единицы в элементе из множества M. Например, элементу 01001111 поставим в соответствие слово ХАХХАААА.

Заметим, что при этом каждому элементу из множества M будет соответствовать единственный элемент из множества N, а каждому элементу из множества N – единственный элемент из множества M. То есть между множествами M и N установлена биекция. Значит, количество элементов в этих множествах одинаково.

Ответ: одинаково.

2. Решение.



Пусть K – множество кратчайших путей, которые ведут из левого нижнего угла в правый верхний. Чтобы добраться по улицам города из левого нижнего угла в правый верхний нужно, как минимум, пройти 5 кварталов вправо и 3 квартала вверх. Любой кратчайший путь будет состоять только из этих отрезков (5 отрезков вправо и 3 отрезка вверх в любом порядке). Обозначим отрезок вправо единицей, а отрезок вверх нулем. Тогда любой кратчайший путь можно представить в виде последовательности из 3 нулей и 5 единиц, где нуль на месте i означает, что i-м по счету в этом пути будет отрезок вверх, единица на месте j означает, что j-м по счету в этом пути будет отрезок вправо. Таким образом, множество K – это множество всех последовательностей из 3 нулей и 5 единиц.

Так как множество K совпадает с множеством M из предыдущей задачи, то количество элементов во множествах K, M и N одинаково.

Ответ: одинаково.

3. Решение.

Будем записывать любое натуральное число n в виде последовательности из n единиц. Например, число 7 запишем как 1111111. Число 0 не будем записывать никак (0 единиц).

Рассмотрим последовательность из пяти единиц: 11111.

Пусть A – это множество способов расставить между этими единицами три нуля так, чтобы нули не стояли по краям и рядом друг с другом. То есть A – это множество всех последовательностей из 3 нулей и 5 единиц, где нули не стоят по краям и рядом друг с другом. Пусть B – это множество способов расставить между этими единицами три нуля без ограничений. То есть B – это множество всех последовательностей из 3 нулей и 5 единиц.

Каждому элементу из множества A поставим в соответствие решение уравнения $x + y + z + t = 5$ в натуральных числах так: x – это количество единиц до первого нуля, y – это количество единиц между

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

первым и вторым нулем, z – это количество единиц между вторым и третьим нулем, t – это количество единиц после третьего нуля. Например, последовательности 11010101 соответствует решение уравнения x=2, y=1, z=1, t=1.

По этому же правилу каждому элементу из множества B поставим в соответствие решение уравнения x + y + z + t = 5 в целых неотрицательных числах. Например, последовательности 01001111 соответствует решение уравнения x=0, y=1, z=0, t=4.

Как мы видим, множество A является подмножеством множества B, значит, в A элементов меньше, чем в B. Соответственно, количество решений уравнений в натуральных числах меньше количества решений в целых неотрицательных числах.

Кроме того, множество B совпадает с множеством M из задачи 1 и множеством K из задачи 2. Значит, количество решений уравнения в целых неотрицательных числах совпадает с количеством элементов в этих множествах.

Ответ: а) решений в целых неотрицательных числах больше, б) да, совпадает.

4. Решение.

Пусть M – множество различных наборов, которые можно составить из 4 различных наклеек выбранных из 9 видов. Пусть N – множество различных наборов, которые можно составить из 5 различных наклеек выбранных из тех же 9 видов.

Каждому набору из 4 наклеек из множества M поставим в соответствие набор 5 наклеек из множества N, состоящий из наклеек оставшихся 5 видов, которые не входят в набор из множества M. Заметим, что при этом каждому набору из множества M будет соответствовать единственный набор из множества N, а каждому набору из множества N – единственный набор из множества M. То есть между множествами M и N установлена биекция. Значит, количество элементов в этих множествах одинаково.

Таким образом, количество наборов из 4 наклеек и из 5 наклеек одинаково.

Ответ: одинаково.

5. Решение.

Пусть M – множество различных бутербродов, которые может приготовить Маша (без масла). Пусть N – множество различных бутербродов, которые может приготовить Даша (с маслом).

Каждому бутерброду из множества M поставим в соответствие бутерброд из множества N, состоящий из тех же ингредиентов, что и бутерброд из множества M, только с добавлением масла. Заметим, что при этом каждому бутерброду из множества M будет соответствовать единственный бутерброд из множества N. Однако, не каждому бутерброду из множества N будет соответствовать бутерброд из множества M. Действительно, бутерброд, состоящий только из хлеба и масла входит в множество N, но для него нет соответствующего бутерброда без масла в множестве M, так как просто хлеб бутербродом не считается. Всем остальным бутербродам из множества N соответствует единственный бутерброд из множества M (из тех же ингредиентов, только без масла).

Таким образом, мы установили биекцию между множеством M и частью множества N. Значит, в множестве N элементов больше, чем в множестве M. То есть Даша сможет сделать больше различных бутербродов, чем Маша.

Ответ: у Даши.

ООО "НТЛ "2x2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

6.Решение.

Пусть M – множество различных аккордов с нотой ми, M_1 – подмножество множества M, состоящее из аккордов из 3-11 нот (то есть не включающее аккорды из двух нот). Так как, кроме ноты ми, в октаве есть еще 11 клавиш, то есть всего 11 аккордов, состоящих из двух нот – ми и еще какой-то из 11 оставшихся. Таким образом, в множестве M на 11 элементов больше, чем в множестве M_1.

Пусть N – множество различных аккордов без ноты ми, N_1 – подмножество множества M, состоящее из аккордов из 2-10 нот (то есть не включающее аккорды из 11 нот). Так как, кроме ноты ми, в октаве есть всего 11 клавиш, то аккордов из 11 нот без ми всего 1. Таким образом, в множестве N на 1 элемент больше, чем в множестве N_1.

Каждому аккорду из множества M_1 поставим в соответствие аккорд из множества N_1, состоящий из тех же нот, что и аккорд из множества M_1, только без ноты ми. Заметим, что при этом каждому аккорду из множества M_1 будет соответствовать единственный аккорд из множества N_1, а каждому аккорду из множества N_1 будет соответствовать единственный аккорд из множества M_1.

Таким образом, мы установили биекцию между множествами M_1 и N_1. Значит, в этих множествах одинаковое количество элементов. Так как в множестве M на 11 элементов больше, чем в множестве M_1, а в множестве N на 1 элемент больше, чем в множестве N_1, то в множестве M на 11-1=10 элементов больше, чем в множестве N.

Ответ: с нотой ми, на 10.

7. Решение.

Пусть M – множество способов выбрать 5 подряд идущих чисел, сумма которых больше пятидесяти, а N – множество способов выбрать 5 подряд идущих чисел, сумма которых не больше пятидесяти.

Каждому набору чисел из множества M поставим в соответствие набор из множества N, включающий оставшиеся 5 чисел, которые не входят в набор из множества M. Это всегда можно сделать, так как если сумма каких-то 5 идущих подряд чисел больше 50, а сумма всех 10 чисел равна 101, то сумма оставшихся 5 чисел меньше 101-50=51, то есть не больше 50.

При таком сопоставлении элементов каждому элементу из множества M будет соответствовать единственный элемент из множества N, а каждому элементу из множества N – единственный элемент из множества M. То есть между множествами M и N установлена биекция. Значит, количество элементов в этих множествах одинаково.

Значит, количество способов выбрать 5 идущих подряд чисел, сумма которых больше 50, равно количеству способов выбрать 5 идущих подряд чисел, сумма которых не больше 50. Всего способов выбрать любые идущие подряд 5 чисел – 10. Значит, половина из них, то есть 5 способов, - это количество способов выбрать идущие подряд 5 чисел, сумма которых больше 50.

Ответ: 5.

ООО "НТЛ "2x2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.