Занятие номер	Класс	Тема
11	6 профи	Маршруты

1. Решение.

а) От A до C можно добраться напрямую 2 способами и через B 3*2=6 способами. Всего 2+6=8 способов.

б) От A до C можно добраться через B 3*2=6 способами и через D и E 2*4*2=16 способами. Всего 6+16=22 способа.

в) От A до C можно добраться так: AEC – 2 способа, AEBDC – 2, AEDC – 1, ABDC – 2, ABEC – 2, ABEDC – 1, ABDEC – 4. Всего 2+2+1+2+2+1+4=14 способов.

Ответ: а) 8, б) 22, в) 14.

2. Решение.

Рассмотрим все возможные варианты:

1) Заяц прыгает только на 1 клетку за один прыжок. Тогда у него есть 1 способ добраться из 1-й клетки в 12-ю.
2) Заяц 1 раз прыгает на 2 клетки, остальные разы – на 1 клетку. Тогда ему нужно сделать всего 10 прыжков, из них 1 «двойной» (Д), и 9 «одинарных» (О). В последовательности 10 прыжков мы можем выбрать место для двойного прыжка 10 способами. Значит, у зайца в этом случае есть 10 способов добраться с 1-й клетки в 12-ю.
3) Заяц делает 2 двойных прыжка, а остальные – одинарные. В этом случае ему нужно сделать 9 прыжков. Выбрать место для двух Д в последовательности из 9 прыжков можно 9*8:2=36 способами.
4) Заяц делает 3 двойных прыжка, а остальные – одинарные. В этом случае ему нужно сделать 8 прыжков. Выбрать место для трех Д в последовательности из 8 прыжков можно 8*7*6:3!=56 способами.
5) Заяц делает 4 двойных прыжка, а остальные – одинарные. В этом случае ему нужно сделать 7 прыжков. Выбрать место для четырех Д в последовательности из 7 прыжков можно 7*6*5*4:4!=35 способами.
6) Заяц делает 5 двойных прыжков, а остальные – одинарные. В этом случае ему нужно сделать 6 прыжков, из которых только один будет О, а остальные Д. Выбрать место для одного О в последовательности из 6 прыжков можно 6 способами.

Таким образом, всего у зайца есть 1+10+36+56+35+6=144 способа добраться из 1-й клетки в 12-ю.
Ответ: 144.

3. Решение.

а) Чтобы добраться из левой нижней клетки в правую верхнюю, фишке нужно сделать 4 хода вправо (П) и 4 хода вверх (В), а всего 8 ходов. Количество способов это сделать равно количеству способов расставить в ряд 4 буквы П и 4 буквы В (этот ряд будет алгоритмом фишки).

Выбрать места для 4 букв П можно 8*7*6*5:4!=70 способами, после этого места для букв В определяются однозначно.

б) Найдем количество способов пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю через центральную клетку и вычтем его из общего количества способов.

До центральной клетки нужно сделать 2 шага вправо и 2 шага вверх, это можно сделать 4*3:2=6 способами. От центральной клетки до правой верхней тоже нужно сделать 2 шага вправо и 2 шага вверх, это можно сделать 6 способами. Таким образом, всего есть 6*6=36 способов пройти через центральную клетку.

А если в центральную клетку фишку ставить нельзя, то пройти из левой нижней в правую верхнюю клетку можно 70-36=34 способами.

в) Сначала подсчитаем общее количество способов пройти из левой нижней в правую верхнюю клетку, если можно ходит по диагонали.

Как в задаче 2, рассматриваем способы, когда по диагонали фишка не ходит, ходит по диагонали 1 раз, ходит 2 раза, 3 раза, 4 раза. Получаем 70 + 7*(6*5*4:3!) + (6*5:2)*(4*3:2) + (5*4*3:3!)*2 + 1 = 70+140+90+20+1=321 способ.
Теперь найдем все пути через центральную клетку. Их количество равно количеству способов добраться из левой нижней в центральную, умноженному на количество добраться из центральной в верхнюю правую. Также рассматриваем, когда до центральной клетки по диагонали фишка не ходит, ходит 1 раз, ходит 2 раза: 4*3:2 + 3*2+1=13 – количество путей из левой нижней клетки в центральную. Из центральной в правую верхнюю – столько же. Всего путей из левой нижней в правую верхнюю клетку через центральную – 13*13=169.

А если в центральную клетку фишку ставить нельзя, то пройти из левой нижней в правую верхнюю клетку можно 321-169=152 способами.

Ответ: а) 70, б) 34, в) 152.

4. Решение.

а) Черепахе нужно сделать 10 ходов вправо и 1 ход вверх, всего 11 ходов. Это можно сделать 11 способами (равно количеству способов выбрать место для хода вверх в последовательности 11 ходов).

б) Черепахе нужно сделать 10 ходов вправо и 2 хода вверх, всего 12 ходов. Это можно сделать 12*11:2=66 способами (равно количеству способов выбрать места для двух ходов вверх в последовательности 12 ходов).

Ответ: а) 11, б) 66.

5. Решение.

а) В строке будет 11 цифр. Выбрать место для единицы можно 11 способами, после этого места для нулей определяются однозначно.

б) В строке будет 12 цифр. Выбрать место для двух единиц можно 12*11:2=66 способами, после этого места для нулей определяются однозначно.

Ответ: а) 11, б) 66.

6. Доказательство.

Черепахе нужно сделать всего n-1 шагов направо и 2 шага вверх. Ее маршрут можно представить в виде последовательности шагов «0» (направо) и «1» (вверх). Количество таких маршрутов равно количеству способов записать в строчку 2 единицы и n–1 нуль.

Ответ: доказано.

7. Решение.

Будем записывать в каждую клетку таблицы количество способов попасть в эту клетку из левой нижней клетки. Ясно, что в любую клетку нижней строки можно попасть единственным способом – двигаясь только вправо. Аналогично, в любую клетку первого столбца можно попасть единственным способом – двигаясь только вверх.

Далее, в остальные клетки можно попасть столькими способами, сколькими можно попасть в клетку снизу (и из этой клетки делаем шаг вверх) и в клетку слева (и из этой клетки делаем шаг вправо). Таким образом, число в каждой клетке равно сумме чисел соседней нижней и соседней левой клеток. Заполнив таким образом клетки, получим таблицу:

1	1	8	39	39	114	339	339	678
1		7	31		75	225		339
1	2	7	24	41	75	150	225	339
1	1	5	17	17	34	75	75	114
1		4	12		17	41		39
1	2	4	8	12	17	24	31	39
1	1	2	4	4	5	7	7	8
1		1	2		1	2		1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Количество способов добраться из левой нижней клетки в правую верхнюю равно 678.

Ответ: 678.

8. Решение.

Первую букву Д можно выбрать только 1 способом. Вторую букву – одну из двух (справа или снизу), третью букву – снова одну из двух, и так далее. Всего есть $1*2*2*2*2*2=2^5=32$ способа прочитать слово.

Если аналогично будет записано другое слово из n разных букв, то прочитать его можно 2^{n-1} способами.

Ответ: а) 32, б) 2^{n-1}.

.