Занятие номер	Класс	Тема
11	6 база	Инвариант.

1. Решение.

Всего дано 6 корзин, в трех из них четное количество огурцов, в трех – нечетное.

Инвариантом в этой задаче является нечетность количества корзин с четным количеством огурцов.

Действительно, при каждом ходе количество корзин с четным количеством огурцов либо увеличивается на 2 (если съесть по 1 огурцу из корзин с нечетным количеством огурцов), либо уменьшается на 2 (если съесть по 1 огурцу из корзин с четным количеством огурцов), либо не меняется (если съесть по 1 огурцу из корзины с нечетным и корзины с четным количеством огурцов).

Если количества огурцов во всех корзинах равны, то во всех корзинах либо четное количество огурцов (тогда количество корзин с четным количеством огурцов равно 6), либо нечетное количество огурцов (тогда количество корзин с четным количеством огурцов равно 0).

Но после любого количества ходов количество корзин с четным количеством огурцов останется нечетным и не сможет равняться 0 или 6.

Ответ: нельзя.

2. Решение.

Всего дано 2021 число, из них 1010 четных и 1011 нечетных.

Заметим, что при любом ходе количество нечетных чисел на доске остается нечетным. Действительно, если стереть два четных числа и написать вместо них их сумму (которая тоже является четной), то количество четных чисел уменьшится на 1, а количество нечетных чисел не изменится. Если стереть два нечетных числа и написать вместо них их сумму (которая является четной), то количество четных чисел увеличится на 1, а количество нечетных чисел уменьшится на 2 (то есть останется нечетным). Если стереть одно четное и одно нечетное число и вместо них написать их сумму (которая является нечетной), то количество четных чисел уменьшится на 1, а количество нечетных чисел не изменится.

Так как на каждом шаге на доске написано нечетное количество нечетных чисел, то сумма всех чисел на доске нечетна. Инвариантом в этой задаче является нечетность суммы написанных на доске чисел.

Допустим, что на некотором шаге оказалось, что на доске написаны только четные числа. Тогда сумма написанных на доске чисел четна. Но это противоречит тому, что сумма написанных чисел всегда нечетна. Значит, только четные числа на доске остаться не могут.

Ответ: нельзя.

3. Решение.

Всего дано 101 число, из них 50 четных и 51 нечетное.

Заметим, что при любом ходе количество нечетных чисел на доске остается нечетным. Действительно, если стереть два четных числа и написать вместо них их разность (которая тоже является четной), то количество четных чисел уменьшится на 1, а количество нечетных чисел не изменится. Если стереть два нечетных числа и написать вместо них их разность (которая является четной), то количество четных чисел увеличится на 1, а количество нечетных чисел уменьшится на 2 (то есть останется нечетным). Если стереть одно четное и одно нечетное число и вместо них написать их разность (которая является нечетной), то количество четных чисел уменьшится на 1, а количество нечетных чисел не изменится.

Инвариантом в этой задаче является нечетность количества нечетных чисел на доске.

Если в итоге на доске осталось 1 число, то это может быть только нечетное число (так как нечетных чисел не может стать 0), и оно не может равняться 0, так как 0 – четное число.

Ответ: не может.

4. Решение.

Инвариантом в этой задаче является нечетность количества минусов на доске.

Действительно, изначально минусов написано 2005, то есть нечетное количество. Если Юра стирает два плюса, то пишет вместо них плюс, поэтому количество минусов на доске не меняется. Если Юра стирает два минуса, то пишет вместо них плюс, поэтому количество минусов на доске уменьшается на 2, а четность количества минусов не меняется. Если Юра стирает минус и плюс, то пишет вместо них минус, поэтому количество минусов на доске не меняется.

Таким образом, после каждого действия Юры количество минусов на доске остается нечетным. Если на доске остался один знак, то это минус. Действительно, если это плюс, то количество минусов на доске равно 0, что противоречит тому, что количество минусов на доске всегда нечетно.

Ответ: минус.

5. Решение.

Изначально у Зои сумма кратна 5. Каждый день на обед она тратит сумму, кратную 5. По свойствам делимости, после каждой оплаты обеда у нее остается разность двух чисел, кратных 5, а значит, оставшаяся сумма кратна 5.

Инвариантом в этой задаче является делимость на 5 суммы, оставшейся у Зои после каждой оплаты обеда. Ровно 234 руб. у нее остаться не может, так как 234 не делится на 5.

Ответ: не может.

6. Решение.

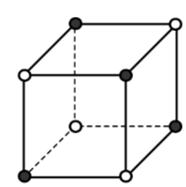
Инвариантом в этой задаче является то, что после каждого шага общее количество кусков бумаги при делении на 3 дает остаток 1 (или количество кусков, «добавленных» к начальному куску, делится на 3).

Действительно, если Кеша рвет кусок на 10 частей, то количество кусков увеличивается на 9 (1 кусок забирает, а 10 возвращает). Если Кеша рвет кусок на 13 частей, то количество кусков увеличивается на 12 (1 кусок забирает, 13 возвращает). Числа 9 и 12 кратны 3, значит, после каждого шага общее количество кусков, «добавленных» к самому первому куску, кратно 3.

Если бы у Кеши получилось 2022 куска, то значит, он «добавил» 2021 кусок. Но 2021 не делится на 3, значит, 2022 куска он получить не может.

Ответ: не может.

7. Решение.



Раскрасим вершины кубика в два цвета так, чтобы начальная вершина была черной, соседние с ней – белыми, любые две соседние вершины были разных цветов (см. рисунок).

При такой раскраске каждую секунду муха переползает с черной вершины на черную. На белые вершины муха попасть не сможет. Значит, ни за какое время муха не сможет побывать во всех вершинах куба.

Инвариантом в этой задаче является цвет вершин (множество из четырех вершин), по которым ползает муха.

Ответ: не хватит.

8. Доказательство.

Всего в таблице 64 клетки. Изначально 63 клетки белые и 1 клетка черная.

Инвариантом в этой задаче является нечетное количество черных клеток.

Действительно, если мы перекрашиваем строку или столбец, содержащий А черных и Б белых клеток, то общее количество черных клеток уменьшается на А и увеличивается на Б (то есть увеличивается на Б-А или уменьшается на А-Б). Так как в каждой строке и в каждом столбце всего 8 клеток, то А и Б либо оба четные, либо оба нечетные, а разности Б-А и А-Б всегда четные. То есть количество черных клеток при каждом ходе увеличивается или уменьшается на четное число.

Изначально в таблице 1 черная клетка. На каждом ходе количество черных клеток остается нечетным. Значит, оно не сможет стать равным 0, так как 0 – четное число. То есть перекрасить все клетки в белый цвет не получится.

Доказано.

9. Доказательство.

Инвариантом в этой задаче является нечетное количество черных угловых клеток.

Действительно, если мы перекрашиваем среднюю строку или средний столбец в таблице, то количество черных угловых клеток не меняется. Крайние строки и столбцы таблицы содержат по 2 угловых клетки. Поэтому, если мы перекрашиваем крайнюю строку или крайний столбец таблицы, то количество черных угловых клеток либо уменьшается на 2 (если обе угловые клетки были черные), либо увеличивается на 2 (если обе угловые клетки были белые), либо не меняется (если одна угловая клетка была белая, другая черная).

Если изначально черных угловых клеток нечетное количество (то есть 1), то после любого количества перекрашиваний строк и столбцов количество черных угловых клеток будет нечетным. Значит, это количество не сможет быть равно 0, так как 0 – четное число. А это значит, то нельзя добиться того, чтобы все клетки таблицы, включая угловые, стали белыми.

Доказано.

10. Решение.

1 способ.

Заметим, что из чисел 2015, 2016 и 2017 на каждом шаге можно получить только четные числа. Действительно, изначальных чисел есть два нечетных и одно четное, то есть количество нечетных чисел – четно. Поэтому числа, которые получатся в результате первого преобразования, будут четными. А так как на первом шаге получатся 3 четных числа (количество нечетных стало 0 (четное)), то на всех следующих шагах ящик будет выдавать три четных числа.

Инвариантом в этой задаче является четность всех трех чисел, получаемых в результате преобразований. Поэтому числа 2013, 2015 и 2018 получить не удастся.

2 способ.

Заметим, что сумма чисел на каждом шаге остается неизменной. Действительно, сложим числа, которые получатся в результате преобразования чисел a, b и c, получим: $a+b-c+b+c-a+c+a-b= a+b+c$.

Инвариантом в этой задаче является сумма чисел набора. Так как изначально эта сумма равна 2015+2016+2017=6048, то получить числа 2013+2015+2018 невозможно, так как их сумма равна 6046.

Ответ: нельзя.

Домашнее задание 11.

Решение.

Заметим, что при любом ходе в результате получается нечетное число. Действительно, изначально на доске написано 2021 (нечетное число). При умножении нечетного числа на 7 получается снова нечетное число. При сложении нечетного числа и 20 (четного числа) получается снова нечетное число.

Инвариантом в этой задаче является нечетность числа, написанного на доске. Поэтому ни через какое количество ходов невозможно получить 20000, так как 20000 – четное число.

Ответ: нельзя.