Занятие номер	Класс	Тема
10	8 профи	Малая теорема Ферма.

1. Доказательство.

$11^{103} - 11 = 11(11^{103-1} - 1)$.

Так как 103 – простое число и 11 не делится на 103, то, по МТФ, $11^{103-1} \equiv 1 \pmod{103}$.

Значит, $11^{103} - 11 = 11(11^{103-1} - 1) \equiv 11(1 - 1) = 11*0 = 0 \pmod{103}$. Значит, $11^{103} - 11$ делится на 103.

Доказано.

2. Решение.

1) Так как 101 – простое число и 2 не делится на 101, то по МТФ $2^{101-1} \equiv 1 \pmod{101}$.

Значит, $2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$.

2) Так как 101 – простое число и 7 не делится на 101, то по МТФ $7^{101-1} \equiv 1 \pmod{101}$.

Значит, $7^{100} \equiv 1 \pmod{101}$. Тогда $7^{102} = 7^2*7^{100} = 49*7^{100} \equiv 49*1 = 49 \pmod{101}$.

3) Так как 29 – простое число и 8 не делится на 291, то по МТФ $8^{29-1} \equiv 1 \pmod{29}$.

Значит, $8^{28} \equiv 1 \pmod{29}$. Тогда $8^{900} = 8^4*8^{896} = 8^4*8^{28*32} = 8^4*(8^{28})^{32} \equiv 8^4*1^{32} = 8^4 = 64*64 \equiv 6*6 = 36 = 7 \pmod{29}$.

Ответ: а) 1; б) 49; в) 7.

3. Доказательство.

a не делится на 101. Действительно, если *a* – трехзначное число и делится на 101, то оно имеет вид n*101, где n – однозначное число от 1 до 9 (иначе, n*101 не будет трехзначным). Но в числе $n*101 = \overline{n0n}$ две цифры одинаковые, а по условию, число *a* записано различными цифрами.

Так как 101 – простое число и *a* не делится на 101, то по МТФ $a^{100} \equiv 1 \pmod{101}$.

Доказано.

4. Решение.

Так как 31 – простое число и 7 не делится на 31, то по МТФ:

$7^{1201} = 7*7^{1200} = 7*(7^{30})^{40} = 7*(7^{31-1})^{40} \equiv 7*1^{40} = 7 \pmod{31}$.

Так как 31 – простое число и 11 не делится на 31, то по МТФ:

$11^{151} = 11*11^{150} = 11*(11^{30})^5 = 11*(11^{31-1})^5 \equiv 11*1^5 = 11 \pmod{31}$.

Значит, $7^{1201}+11^{151} \equiv 7 + 11 = 18 \pmod{31}$.

Ответ: 18.

5. Доказательство.

Рассмотрим произведение и воспользуемся формулой $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$:

$(n^8+1)(n^4+1)(n^2+1)(n+1)(n-1) = (n^8+1)(n^4+1)(n^2+1)(n^2-1) = (n^8+1)(n^4+1)(n^4-1) =$
$= (n^8+1)(n^8-1) = n^{16}-1$.

Так как 17 – простое число, и n не делится на 17, то по МТФ:

$n^{16}-1 \equiv 1-1 = 0 \pmod{17}$.

С одной стороны, $n^{16}-1 \equiv 0 \pmod{17}$.

С другой стороны, $n^{16}-1 = (n^8+1)(n^4+1)(n^2+1)(n+1)(n-1)$.

Значит, $(n^8+1)(n^4+1)(n^2+1)(n+1)(n-1) \equiv 0 \pmod{17}$. Так как произведение чисел в скобках делится на 17, а 17 – простое число, то хотя бы одно из чисел в скобках делится на 17.

Доказано.

6. Доказательство.

Докажем, что $17^{120}-1$ делится на 11 и на 13.

Так как 11 – простое число, и 17 не делится на 11, то по МТФ:

$17^{120}-1 = (17^{10})^{12}-1 = (17^{11-1})^{12}-1 \equiv 1^{12}-1 = 1-1 = 0 \pmod{11}$.

Так как 13 – простое число, и 17 не делится на 13, то по МТФ:

$17^{120}-1 = (17^{12})^{10}-1 = (17^{13-1})^{10}-1 \equiv 1^{10}-1 = 1-1 = 0 \pmod{13}$.

А так как 11 и 13 – взаимно простые числа, то $17^{120}-1$ делится на 11*13=143.

Доказано.

7. Доказательство.

Докажем, что $3^{3000}-1$ делится на 7, на 11 и на 13.

Так как 7 – простое число, и 3 не делится на 7, то по МТФ:

$3^{3000}-1 = (3^6)^{500}-1 = (3^{7-1})^{500}-1 \equiv 1^{500}-1 = 1-1 = 0 \pmod{7}$.

Так как 11 – простое число, и 3 не делится на 11, то по МТФ:

$3^{3000}-1 = (3^{10})^{300}-1 = (3^{11-1})^{300}-1 \equiv 1^{300}-1 = 1-1 = 0 \pmod{11}$.

Так как 13 – простое число, и 3 не делится на 13, то по МТФ:

$3^{3000}-1 = (3^{12})^{250}-1 = (3^{13-1})^{250}-1 \equiv 1^{250}-1 = 1-1 = 0 \pmod{13}$.

А так как 7, 11 и 13 – взаимно простые числа, то $3^{3000}-1$ делится на 7*11*13=1001.

Доказано.

8. Решение.

Так как 7 – простое число, и 491 не делится на 7 (491 – тоже простое число), то по МТФ:

$491^{1501} = 491*491^{1500} = 491*(491^6)^{250} \equiv 491*1^{250} = 491 \pmod 7$.

Так как 11 – простое число, и 491 не делится на 11, то по МТФ:

$491^{1501} = 491*491^{1500} = 491*(491^{10})^{150} \equiv 491*1^{150} = 491 \pmod{11}$.

Так как 13 – простое число, и 491 не делится на 13, то по МТФ:

$491^{1501} = 491*491^{1500} = 491*(491^{12})^{125} \equiv 491*1^{125} = 491 \pmod{13}$.

Значит, число $491^{1501}–491$ делится без остатка на 7, на 11 и на 13. А так как 7, 11 и 13 – взаимно простые числа, то $491^{1501}–491$ делится без остатка на 7*11*13=1001.

Тогда $491^{1501} = (491^{1501}–491)+491 \equiv 0 + 491 = 491 \pmod{1001}$.

Ответ: 491.

9. Доказательство.

$111\ldots11 = 999\ldots99/9 = (1000\ldots00–1)/9 = (10^{p–1})/9$.

Так как p – простое число и 10 не делится на p (10 делится только на 2 и на 5, а p > 5), то по МТФ:

$111\ldots11 = (10^{p–1})/9 \equiv (1–1)/9 = 0 \pmod p$.

Доказано.