7 база. Множества. Часть 2.

1. **Решение.**

Наименьшее число комнат, в которых стоят букеты двух видов, равно 2 (ровно в двух комнатах стоят одновременно хризантемы и гвоздики). Значит, комнат, где стоят одновременно розы, гвоздики и хризантемы, может быть не более 2.

Наибольшее количество комнат будет в том случае, если в каждой комнате будет стоять не более 1 букета каждого вида. Попробуем расставить букеты так, чтобы соблюдались условия задачи.

Рассмотрим три случая:

1) Нет ни одной комнаты, в которой стоят три букета разных видов.

Тогда комнат только с букетами двух видов будет не более 2+3+4=9. Комнат только с хризантемами (без гвоздик и роз) – не более 10-2-3=5. Комнат только с гвоздиками (без хризантем и роз) – не более 20-2-4=14. Комнат только с розами (без хризантем и гвоздик) – не более 30-3-4=23.

Всего комнат не более 9+5+14+23=51.

2) Есть ровно 1 комната, в которой стоят три букета разных видов.

Тогда комнат только с хризантемами и гвоздиками будет 2-1=1, только с хризантемами и розами – 3-1=2, только с гвоздиками и розами – 4-1=3. Всего комнат с букетами ровно двух видов будет 1+2+3=6.

Комнат только с хризантемами (без гвоздик и роз) – не более 10-1-2-1=6. Комнат только с гвоздиками (без хризантем и роз) – не более 20-1-3-1=15. Комнат только с розами (без хризантем и гвоздик) – не более 30-2-3-1=24.

Всего комнат не более 1+6+6+15+24=52.

3) Есть ровно 2 комнаты, в которой стоят три букета разных видов.

Тогда комнат только с хризантемами и гвоздиками будет 2-2=0, только с хризантемами и розами – 3-2=1, только с гвоздиками и розами – 4-2=2. Всего комнат с букетами ровно двух видов будет 0+1+2=3.

Комнат только с хризантемами (без гвоздик и роз) – не более 10-0-1-2=7. Комнат только с гвоздиками (без хризантем и роз) – не более 20-0-2-2=16. Комнат только с розами (без хризантем и гвоздик) – не более 30-1-2-2=25.

Всего комнат не более 2+3+7+16+25=53.

Таким образом, во всех трех случаях количество комнат не более 53, и не моет быть равно 55.

Ответ: не может.

2. **Решение.**

1 способ.

Пусть в Австралии X женатых мужчин и X замужних женщин, а в сумме $2 \cdot X$ людей состоит в браке. Тогда в стране всего $X:2 \cdot 3 = 3/2 \cdot X$ мужчин и $X:3 \cdot 5 = 5/3 \cdot X$ женщин, а в сумме $3/2 \cdot X + 5/3 \cdot X = 19/6 \cdot X$ жителей.

Тогда доля населения, состоящего в браке, составляет $(2 \cdot X):(19/6 \cdot X) = 2:19/6 = 12/19$.

2 способ.

Пусть в Австралии живет X мужчин. Тогда $2/3 \cdot X$ мужчин женаты. Так как у каждого женатого мужчины ровно одна жена, то в стране $2/3 \cdot X$ замужних женщин. Так как замужние женщины составляют 3/5 всех женщин, то всего в стране $2/3 \cdot X:3 \cdot 5=10/9 \cdot X$ женщин.

Итак, в Австралии живет всего X мужчин и $10/9 \cdot X$ женщин, то есть всего $19/9 \cdot X$ человек.

Женатых мужчин и замужних женщин всего $2/3 \cdot X+2/3 \cdot X=4/3 \cdot X$.

Доля населения, состоящего в браке, составляет $4/3 \cdot X:(19/9 \cdot X) = 4/3:19/9 = 12/19$.

Ответ: 12/19.

3. Решение.

1 способ.

Пусть в классе X человек интересуются и математикой, и физикой. Тогда, так как X – это 20% всех интересующихся математикой, то *только* математикой интересуются в 4 раза больше учеников, то есть 4X. Так как X – это 25% всех интересующихся физиков, то *только* физикой интересуются в 3 раза больше учеников, то есть 3X.

Таким образом, всего в классе $X+4X+3X+2=8X+2$ человек.

По условию задачи, $20 < 8X+2 < 30$.

Вычтем из всех частей неравенства 2, получим: $18 < 8X < 28$.

Разделим все части неравенства на 8, получим $18/8 < X < 28/8$, или $2{,}25 < X < 3{,}5$.

Так как X – целое число, обозначающее количество учеников, то X=3.

Тогда в классе всего $8X+2=8*3+2=26$ учеников.

2 способ.

Пусть в классе M человек интересуются математикой. Тогда 20% из них, то есть $1/5 \cdot M$ (одна пятая часть) человек интересуются еще и физикой, а $4/5 \cdot M$ интересуются *только* математикой.

Так как $1/5 \cdot M$ (ученики, интересующиеся и математикой, и физикой) – это 25%, то есть четверть всех, интересующихся физикой, то *только* физикой интересуются в 3 раза больше человек, то есть $3/5 \cdot M$.

Таким образом, в классе вместе с Петей и Васей всего $M+3/5 \cdot M+2 = 8/5 \cdot M+2$ учеников.

По условию задачи, $20 < 8/5 \cdot M+2 < 30$.

Вычтем из всех частей неравенства 2, получим: $18 < 8/5 \cdot M < 28$.

Умножим все части неравенства на 5/8, получим: $90/8 < M < 140/8$, или $11{,}25 < M < 17{,}5$.

Так как M – целое число (количество учеников, интересующихся математикой), то M равно 12, 13, 14, 15, 16 или 17. Кроме того, $1/5 \cdot M$, $4/5 \cdot M$ и $3/5 \cdot M$ – тоже целые числа, так как обозначают количество учеников. Значит, M делится на 5. Из всех перечисленных значений на 5 делится только M=15.

Так как M=15, то всего в классе $8/5 \cdot M+2 = 8/5 \cdot 15+2=26$ учеников.

Ответ: 26 учеников.

4. Решение.

a_1-a_2 – столько человек получили ровно 1 двойку, a_2-a_3 – ровно 2 двойки, …, a_{k-1}-a_k – ровно k-1 двоек, a_k – ровно k двоек.

Таким образом, всего было получено $1*(a_1-a_2)+2*(a_2-a_3)+ \ldots + (k-1)*(a_{k-1}-a_k)+k*a_k$ двоек.

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим $a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k$ двоек.

Ответ: $a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k$.

5. Решение.

$1000000 = 1000^2 = 100^3 = 10^6$. Поэтому в указанном промежутке ровно 1000 квадратов и 100 кубов. 10 чисел из них являются шестыми степенями, то есть квадратами и кубами одновременно. Все четвёртые степени находятся среди квадратов. Следовательно, условию удовлетворяют $1000000 - 1000 - 100 + 10 = 998910$ чисел.

Ответ: 998910.