Занятие номер	Класс	Тема
7	7 база	Принцип Дирихле. Часть 1.

1. 470 пасажиров разместились в 16 автобусах. Докажите, что, как бы ни расположились пассажиры, всегда найдётся автобус
   а) в котором больше 29 пассажиров;
   б) в котором меньше 30 пассажиров.

   Доказательство.

   а) Предположим, что это не так: не найдется автобус, в котором больше 29 пассажиров, то есть в каждом автобусе не больше 29 пассажиров. Тогда в 16 автобусах не более 29*16=464 пассажира. Это противоречит условию, что пассажиров было 470. Значит, предположение неверно, и всегда найдется автобус, в котором больше 29 пассажиров.

   а) Предположим, что это не так: не найдется автобус, в котором меньше 30 пассажиров, то есть в каждом автобусе не меньше 30 пассажиров. Тогда в 16 автобусах не менее 30*16=480 пассажиров. Это противоречит условию, что пассажиров было 470. Значит, предположение неверно, и всегда найдется автобус, в котором меньше 30 пассажиров.

   Доказано.

2. В столовой 30 столов, и за столами сидят в сумме 145 человек. Докажите, что за одним из столов сидит не менее 5 человек.

   Доказательство.

   Предположим, что это не так: ни за одним из столов не сидит не менее 5 человек, то есть за каждым столом сидит менее 5 человек (значит, не более 4). Тогда, так как столов всего 30, то в столовой сидит не более 4*30=120 человек. Это противоречит условию, что людей в столовой 145. Значит, предположение неверно, и найдется стол, за которым сидит не менее 5 человек.

   Доказано.

3. В лагерь приехали 25 семиклассников, каждый из которых живет либо в Москве, либо в Санкт-Петербурге, либо в Нижнем Новгороде. Докажите, среди них найдутся хотя бы 9 детей, из одного города.

   Доказательство.

   Предположим, что это не так, то есть семиклассников из одного города – не более 8. Тогда, так как городов всего 3, то семиклассников в лагере не более 8*3=24. Это противоречит условию, что всего семиклассников 25.

   Значит, предположение неверно, и среди семиклассников найдутся хотя бы 9 детей из одного города.

   Доказано.

4. В хрестоматии 50 стихотворений. Каждое из них написано одним из трех поэтов. Докажите, что найдется поэт, которому принадлежит не менее 17 стихов из этой хрестоматии.

   Доказательство.

Предположим, что это не так: не найдется поэт, которому принадлежит не менее 17 стихов из этой хрестоматии, то есть каждому поэту принадлежит менее 17 (значит, не более 16) стихов. Тогда, так как поэтов трое, то в хрестоматии не более 16*3=48 стихов. Это противоречит условию, что стихов в хрестоматии 50. Значит, предположение неверно, и всегда найдется поэт, которому принадлежит не менее 17 стихов из этой хрестоматии.

Доказано.

5. Во песочнице гуляют 20 детей в возрасте от 3 до 7 лет. Докажите, что в песочнице найдутся четыре ребенка одинакового возраста. Обязательно ли найдутся 5 детей одного возраста?

   Решение.

   а) Предположим, что это не так: не найдутся 4 ребенка одинакового возраста, то есть детей каждого возраста не более 3. Тогда, так как вариантов возрастов всего 5 (3 года, 4 года, 5 лет, 6 лет, 7 лет), то детей в песочнице не более 5*3=15. Это противоречит тому, что их 20. Значит, предположение неверно, и найдутся четыре ребенка одинакового возраста.

   б) Нет, не обязательно. Например, если в песочнице гуляют ровно по 4 ребенка каждого из 5 возрастов, то всего их 4*5=20, но при этом нет пяти детей одного возраста.

   Ответ: а) доказано, б) не обязательно.

6. В семи корзинах лежат 115 грибов, в каждой не меньше 15. Докажите, что найдутся две корзины, в которых грибов поровну.

   Доказательство.

   Предположим, что это не так, то есть во всех корзинах – разное количество грибов. Тогда, так как корзин семь, то всего в них не менее 15+16+17+18+19+20+21=126 грибов. Это противоречит условию, что грибов в корзинах всего 115.

   Значит, предположение неверно, найдутся две корзины, в которых грибов поровну.

   Доказано.

7. Какое наименьшее количество учащихся должно быть в школе, чтобы гарантированно можно было найти трех учащихся, отмечающих день рождения в один и тот же день?

   Решение.

   Наибольшее количество дней в году – 366.

   366*2=732 детей недостаточно, так как может оказаться, что в каждый день года день рождения ровно у двоих детей, и ни в какой день года – у троих. Значит, нужно не менее 733 детей.

   733 ребенка достаточно, так как среди любых 733 детей найдется трое, отмечающих день рождения в один и тот же день. Действительно, если это не так, то детей в школе не более 366*2=732, что противоречит тому, что их 733.

   Ответ: 733.

Домашнее задание 7.

1. За неделю Кира, Оля и Женя написали друг другу 110 записок на уроках. Докажите, что хотя бы одна из них написала или десять записок на одном и том же уроке, или пять на разных.

   Доказательство.

   Предположим, что это не так: каждая девочка написала менее 10 записок на одном и том же уроке и менее 5 записок на разных уроках. То есть каждая девочка написала не более 9 записок на разных уроках и не более 4 записок на одном и том же уроке. Тогда каждая девочка написала не более 9*4=36 записок, а вместе три девочки написали не более 3*36=108 записок. Получили противоречие с условием, что записок было 110. Значит, предположение неверно, и хотя бы одна из них написала или десять записок на одном и том же уроке, или пять на разных.

   Доказано.

2. 7 преподавателей разделили между собой 47 тетрадей для проверки. Докажите, что найдется не менее четырёх преподавателей каждому из которых досталось менее 12 тетрадей.

   Доказательство.

   Предположим, что это не так: преподавателей, каждому из которых досталось менее 12 тетрадей, менее четырех, то есть 3 или меньше. Тогда преподавателей, каждому из которых досталось не менее 12 тетрадей, не менее 7-3=4. Значит, этим преподавателям досталось не менее 4*12=48 тетрадей, а это невозможно, так как тетрадей всего 47. Значит, предположение неверно, и найдется не менее четырёх преподавателей, каждому из которых досталось менее 12 тетрадей.

   Доказано.

7 база. Принцип Дирихе. Часть 2.

8. Докажите, что в любой компании найдутся двое, у которых одинаковое количество друзей в этой компании.

   Доказательство.

   Пусть в компании n человек.

   Предположим, что это не так: у всех людей в компании разное количество друзей в этой компании. Так как в компании всего n человек, а сам себе человек другом не является, то у каждого человека в компании не более n-1 друзей. Но если у кого-то из людей в компании n-1 друзей, то он дружит со всеми остальными, а значит, нет человека, у которого 0 друзей (так как он тоже дружит с тем, у кого n-1 друзей). Если же у кого-то из людей в компании 0 друзей, то нет человека, у которого n-1 друзей. Таким образом, получаем n-1 разных возможных количеств друзей: от 0 до n-2 или от 1 до n-1. Если количество друзей у всех людей в компании разное, то в компании не более n-1 людей, а это противоречит тому, что их n. Значит, предположение неверно, и в компании из n человек найдутся двое, у которых одинаковое количество друзей в этой компании.

   Доказано.

9. Докажите что, среди 68 людей всегда можно выбрать 9 людей разного возраста или 9 ровесников.

Доказательство.

Предположим, что это не так: среди 68 людей нельзя выбрать ни 9 людей разного возраста, ни 9 ровесников. Тогда среди всех людей есть не более 8 людей разных возрастов и не более чем по 8 людей каждого из возрастов. Значит, всего людей не более 8*8=64, что противоречит условию, что людей 68. Значит, предположение неверно, и среди 68 людей всегда можно выбрать 9 людей разного возраста или 9 ровесников.

Доказано.

10. Сколько кубиков нужно взять, чтобы среди них наверняка нашлось 15 разноцветных или 10 – одного цвета?

Решение.

Наименьшее количество кубиков для этого равно 14*9+1=127.

Действительно, среди 127 кубиков найдутся 15 разноцветных или 10 кубиков одного цвета. Докажем это. Предположим, что это не так: среди 127 кубиков есть не более 14 разноцветных и не более 9 кубиков одного цвета. Тогда всего кубиков не более 14*9=126. Это противоречит условию, что кубиков 127. Значит, предположение неверно, и среди 127 кубиков найдутся 15 разноцветных или 10 одного цвета.

Докажем, что 127 – это наименьшее количество кубиков, для которого выполняется условие задачи. Действительно, если кубиков хотя бы 126, то все они могут быть 14 разных цветов, и кубиков каждого цвета по 9. В этом случае не найдется ни 15 разноцветных кубиков, ни 10 кубиков одного цвета.

Ответ: 127 кубиков.

11. Каждая клетка таблицы 101x101 покрашена в один из 100 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Всегда ли можно за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?

Решение.

Так как в каждой строке таблицы 101 клетка, а цветов всего 100, то в каждой строке найдутся хотя бы 2 клетки одного цвета. Значит, каждую строку можно перекрасить в один цвет.

После этого все столбцы таблицы будут покрашены одинаково. Так как в каждом столбце 101 клетка, а цветов всего 100, то в каждом столбце найдутся хотя бы 2 клетки одного цвета. Значит, можно перекрасить каждый столбец в один цвет. А так как столбцы после перекрашивания строк были покрашены одинаково, то все столбцы можно перекрасить в один и тот же цвет.

Таким образом, таблицу всегда можно перекрасить в один цвет.

Ответ: всегда.

12. В зоопарк привезли 70 попугаев. При каком наибольшем количестве клеток попугаев можно так рассадить по клеткам, что во всех клетках будет разное количество попугаев? А если помимо этого еще требуется, чтобы в клетке сидело не менее 3 попугаев?

Решение.

а) Пусть клеток N, и в них сидят, как минимум, 1, 2, … N попугаев. Тогда общее количество попугаев не меньше N*(N+1):2 (используем метод Гаусса). По условию задачи, имеется 70 попугаев. Можем составить неравенство:

$N*(N+1):2 \le 70$, или $N*(N+1) \le 140$.

Найдем наибольшее число N, при котором это неравенство выполняется. Перебрав по порядку несколько вариантов чисел, находим, что наибольшее N=11.

В 12 и больше клеток 70 попугаев не получится рассадить так, что во всех клетках будет сидеть разное количество попугаев. Действительно, если бы это было возможно для 12 клеток, то в них бы сидело не менее $1+2+3+\ldots+11+12 = 12*(12+1):2 = 78$ попугаев, это противоречит тому, что попугаев всего 70.

В 11 клеток попугаев можно рассадить так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15.

б) В случае, когда в каждой клетке должно сидеть не менее 3 попугаев, в клетках сидят, как минимум, 3, 4, 5, …, N+2 попугаев, а неравенство будет таким:

$N*(N+2+3):2 \le 70$, или $N*(N+5) \le 140$.

Методом перебора находим, что наибольшее N, при котором выполняется неравенство, равно 9. При $N \ge 10$ общее количество попугаев будет не меньше $10*(10+5):2=75$, что противоречит тому, что попугаев всего 70.

В 11 клеток попугаев можно рассадить так: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 18.

Ответ: а) 11, б) 9.