Занятие номер	Класс	Тема
9	6 профи	Комбинаторика. Часть 2.

1. Решение.

Количество различных способов построить в шеренгу 12 человек равно P_{12}=12!=479001600. Значит, чтобы встать в шеренгу всеми возможными способами группе потребуется 479001600 с.

479001600 с = 7983360 мин. = 133056 ч.

Значит, ни 15 минут, ни еще 1,5 часов не хватит, чтобы перебрать все варианты построения.

Ответ: не может.

2. Решение.

Выбрать доску, которую мы покрасим в синий цвет, можно 9 способами, после этого выбрать доску, которую покрасим в красный цвет, – 8 способами, после этого выбрать доску, которую покрасим в зеленый цвет, – 7 способами. Всего есть 9*8*7=504 способа выбрать три упорядоченные доски из 9.

Заметим, что это количество способов равно $A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Ответ: $A_9^3 = 504$.

3. Решение.

Выбрать первую из пяти досок, которую мы покрасим в белый цвет, можно 9 способами, вторую – 8, способами, третью – 7 способами, четвертую – 6 способами, пятую – 5 способами. Так как все белые доски одинаковые, и порядок их в выбранной пятерке не важен, то всего есть 9*8*7*6*5:5!=126 способов покрасть 5 досок из 9 в белый цвет.

Заметим, что это количество способов равно $C_9^5 = \frac{9!}{(9-5)! \cdot 5!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$.

Ответ: $C_9^5 = 126$.

4. Решение.

Выбрать 0 досок для покраски в белый цвет можно 1 способом. Выбрать 1 доску для покраски в белый цвет можно 9 способами. Выбрать 2 доски для покраски в белый цвет можно $C_9^2 = 9 \cdot 8 : 2 = 36$ способами. Выбрать 3 доски для покраски в белый цвет можно $C_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 : 3! = 84$ способами.

Всего есть 1+9+36+84=130 способов покрасить в белый цвет не более 3 досок.

Ответ: $C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 = 1 + 9 + 36 + 84 = 130$.

5. Решение.

а) Выбрать 4 доски, которые мы покрасим красным цветом, можно $C_9^4 = \frac{9!}{(9-4)! \cdot 4!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$ способами, после этого доски, которые будут синими, определяются однозначно.

б) В этом случае еще 3 доски останутся неокрашенными. Выбрать 4 доски, которые мы покрасим красным цветом, можно C_{12}^4=12*11*10*9:4!=495 способами. После этого доски, которые мы покрасим синим цветом, можно выбрать C_8^5=8*7*6*5*4:5!=56 способами. После этого неокрашенные доски определяются однозначно. Всего есть 495*56=27720 покрасить забор указанным образом.

Ответ: а) $C_9^4 = 126$, б) $C_{12}^4 \cdot C_8^5$=27720.

6. Решение.

Так как одну заколку Катя хочет оставить себе, то нужно выбрать 5 заколок из 14. Сделать это можно C_{14}^{5}=14!:9!:5!=2002 способами.

Ответ: 2002.

7. Решение.

Так как самая красивая заколка обязательно должна быть в выбранной пятерке заколок, то нужно выбрать к ней еще 4 заколки из остальных 14. Сделать это можно C_{14}^{4}=14!:10!:4!=1001 способом.

Ответ: 1001.

8. Решение.

Выбрать 2 марки для обмена Петя может C_7^2=7!:5!:2!=21 способом. Для каждого этого варианта Вася может подобрать 3 открытки для обмена C_5^3=5!:2!:3!=10 способами. Всего есть 21*10=210 способов обменять две марки одного на три открытки другого.

Ответ: $C_7^2 \cdot C_5^3$=21· 10=210.

9. Решение.

Если число 10 – это сумма шести единиц и двоек, то единиц среди них 2, а двоек 4 (если все единицы, то сумма шести числе равна 6, значит, четыре единицы надо заменить на двойки, чтобы получить сумму на 4 больше, то есть 10).

Таким образом, количество решений уравнения равно количеству способов «назначить» неизвестным a, b, c, d, e и f значения 1, 1, 2, 2, 2 и 2. Выбрать переменные для двух единиц можно C_6^2=6!:4!:2!=15 способами, после чего переменные для двоек определяются однозначно.

Значит, всего есть 15 решений данного уравнения.

Ответ: 15.

10. Решение.

Заметим, что число, составленное из единиц и двоек, делится на 4 только тогда, когда оно оканчивается цифрами 12 (если оно оканчивается цифрами 11, 22 или 21, то оно не делится на 4 по признаку делимости на 4).

Значит, нужно найти все 12-значные числа, состоящие из 4 единиц и 8 двоек, которые оканчиваются цифрами 12. Оставшиеся 3 единицы и 7 двоек можно расставить в числе на любые из оставшихся 10 мест. Выбрать места для 3 единиц можно C_{10}^{3}=10!:7!:3!=120 способами, после чего места для 7 двоек определяются однозначно.

Таким образом, всего есть 120 12-значных чисел, делящихся на 4 и состоящих из 4 единиц и 8 двоек.

Ответ: 120.

11. Решение.

а) Так как мастей всего 4, то среди выбранных 4 карт должны присутствовать все 4 масти.

Так как достоинств карт всего 9, то выбрать карту первой масти можно 9 способами, карту второй масти – 9 способами, карту третьей масти – 9 способами, карту четвертой масти – 9 способами. Всего есть 9*9*9*9=9^4=6561 способов выбрать 4 карты разных мастей.

б) Выбрать масть можно 4 способами, после этого четыре карты из 9 карт этой масти можно выбрать 9*8*7*6:4!=126 способами. Всего есть 4*126=504 способа выбрать 4 карты одной масти.

Другой способ: выбрать одну карту в четверку можно 36 способами, после этого остальные три карты должны совпадать по масти с первой, значит, выбрать из можно 8, 7 и 6 способами соответственно. Так как порядок карт в четвертке не важен, то всего есть 36*8*7*6:4!=504 способа выбрать 4 карты одной масти.

Ответ: а) 9^4=6561, б) 4*9*8*7*6:4!=504.