Занятие номер	Класс	Тема
8	6 профи	Комбинаторика. Часть 1.

1. Решение.

а) Для фикуса горшок можно выбрать 10 способами (один из 10 горшков), после этого для крокуса – 9 способами (один из 9 оставшихся), после этого для анютиных глазок – 8 способами (один из 8 оставшихся). Всего есть 10*9*8=10!:7! способов выбрать горшки для этих растений. Заметим, что это A_{10}^{3}, то есть количество размещений без повторений из 10 элементов по 3.

б) Для первого кактуса горшок можно выбрать 10 способами (один из 10 горшков), после этого для второго кактуса – 9 способами (один из 9 оставшихся), после этого для третьего кактуса – 8 способами (один из 8 оставшихся). Так как все растения одинаковые, то всего есть 10*9*8:3!=10!:7!:3! способов выбрать горшки для этих растений. Заметим, что это C_{10}^{3}, то есть количество сочетаний без повторений из 10 элементов по 3.

Ответ: а) A_{10}^{3}=10!:7!, б) C_{10}^{3},= 10!:7!:3!

2. **Решение.**

Каждому Гришиному способу выноса 8 стульев соответствует 12! способов рассадки 12 человек на оставшиеся стулья. Значит, у Кости в 12! раз способов больше, чем у Гриши.

Ответ: у Кости больше в 12! раз.

3. **Решение.**

Пронумеруем ступеньки лестницы, например, начиная с верхней.

Запишем каждый вариант спуска по лестнице в виде последовательности из семи 1 и 0. Цифра 1 будет означать, что на ступеньку с этим номером вступили ногой, цифра 0 – эту ступеньку перепрыгнули. Например, последовательность 0011010 – это вариант спуска по лестнице, при котором 1-ю, 2-ю, 5-ю и 7-ю ступеньки перепрыгнули, а на 3-ю, 4-ю и 6-ю вступили.

Значит, количество вариантов спуска равно количеству всех возможных таких последовательностей. Посчитаем их количество. Первую цифру последовательности можно выбрать двумя способами (0 или 1), вторую – тоже двумя, третью – тоже, и так далее. Значит, мы можем составить всего 2*2*2*2*2*2*2=128 таких последовательностей. Соответственно, есть 128 способов спуститься по лестнице.

Ответ: 128.

4. Решение.

Будем рассуждать так же, как в предыдущей задаче.

Пронумеруем фонари. И каждый вариант комбинации разбитых и горящих фонарей обозначим последовательностью из восьми 0 и 1. Цифра 0 будет обозначать, что фонарь с этим номером разбит, цифра 1 – фонарь с этим номером горит.

Например, последовательность 00000000 соответствует варианту, когда все фонари были разбиты, а последовательность 11110000 соответствует варианту, когда первые четыре фонаря горят, а последние четыре – разбиты.

Общее количество таких последовательностей, а следовательно, и искомых вариантов равно 2*2*2*2*2*2*2*2=256.

Ответ: 256.

5. Решение.

Принцип решения такой же, как в предыдущих задачах.

Пронумеруем письма и «закодируем» каждый вариант доставки писем последовательностью из шести цифр 1, 2 и 3. Цифра 1 значит, что письмо с этим номером отдали 1-му курьеру, цифра 2 – письмо с этим номером отдали 2-му курьеру, цифра 3 – письмо с этим номером отдали 3-му курьеру. Например, последовательность 221331 соответствует варианту доставки, при котором письма 1 и 2 передали 2-му курьеру, письма 3 и 6 – 1-му курьеру, письма 4 и 5 – 3-му курьеру.

Количество способов доставки писем равно количеству всех возможных таких последовательностей. Поскольку каждую цифру в последовательности можно выбрать тремя способами (1, 2 или 3), то всего таких последовательностей $3*3*3*3*3*3=3^6=729$.

Ответ: 729.

6. **Решение.**

а) В этом случае надо посчитать количество способов выбрать 3 человек из 6 заместителей в компанию к мэру. Всего есть C_6^3,= 6!:3!:3!=20 способов это сделать.

б) В этом случае надо посчитать количество способов выбрать 4 человек из 6 заместителей. Всего есть C_6^4,= 6!:2!:4!=15 способов это сделать.

Ответ: а) 20, б) 15.

7. **Решение.**

а) C_{15}^{10} - выбираем 10 детей, кому дадим красные галстуки, остальным – синие.

б) $C_{25}^{10}C_{15}^{5}$ - выбираем 10 детей, кому дадим красные галстуки, затем 5 детей из оставшихся, которым дадим синие, остальным – ничего.

а) В этом случае останутся лишние галстуки. C_{15}^{10} – раздать 10 красных и 2 синих, C_{15}^{9} – раздать 9 красных и 3 синих, C_{15}^{8} – раздать 8 красных и 4 синих, C_{15}^{7} – раздать 7 красных и 5 синих. Всего $C_{15}^{10} + C_{15}^{9} + C_{15}^{8} + C_{15}^{7}$ способов.

Ответ: а) C_{15}^{10}, б) $C_{25}^{10}C_{15}^{5}$, в) $C_{15}^{10} + C_{15}^{9} + C_{15}^{8} + C_{15}^{7}$.

8. **Решение.**

а) В каждом треугольнике две вершины лежат на одной прямой, а третья вершина не лежит на этой прямой. Поэтому в каждом треугольнике две вершины – это пара точек с одной из прямых, третья вершина – одна точка со второй прямой. Любые три точки, выбранные таким способом, однозначно определяют треугольник.

Пусть прямая, на которой отмечено 10 точек, - это прямая *a*, а вторая прямая, на которой отмечено 11 точек – это прямая *b*. Выбрать две точки с прямой *a* и одну точку с прямой *b* можно $C_{10}^2 \cdot$ 11=11*10!:8!:2!=11!:8!:2!=495 способами. Выбрать две точки с прямой *b* и одну точку с прямой *a* можно $C_{11}^2 \cdot$ 10=10*11!:9!:2!=550 способами. Всего есть 495+550=1045 треугольников с вершинами в этих точках.

б) Любые четыре точки, две из которых – с прямой *a* и две – с прямой *b*, однозначно определяют четырехугольник. Выбрать две точки с прямой *a* и две точки с прямой *b* можно $C_{10}^2 \cdot C_{11}^2$=10!:8!:2!*11!:9!:2!=10*9*11*10:2!:2!=2475 способами. Всего есть 2475 четырехугольников с вершинами в этих точках..

Ответ: а) 1045, б) 2475.

9. **Решение.**

Офицера в отряд можно выбрать 3 способами, двух сержантов - C_6^2=15 способами, 20 рядовых - C_{60}^{20}=60!:40!:20!. Всего есть 3*15*60!:40!:20!=45*60!:40!:20! Способов выделить отряд.

Ответ: 45*60!:40!:20!.

10. **Решение.**

На первый вечер 6 артистов можно выбрать из всех 20, то есть C_{20}^6 способами, на второй вечер – из оставшихся 14, то есть C_{14}^6 способами. Всего есть способов выбрать две шестерки артистов на два вечера.

Ответ: C_{20}^6⍰C_{14}^6.

11. Решение.

Считаем, что варианты размещения дипломатов, отличающиеся только поворотом вокруг стола, одинаковыми. Тогда расставим сначала всех дипломатов в ряд (15! способов), а затем в этом порядке посадим за стол. Каждый ряд – это 15 одинаковых способов рассадки за стол (отличаются поворотом ряда вокруг стола). Значит, количество способов рассадки равно P_{15}:15=15!:15=14!.

(Если бы варианты размещения дипломатов, отличающиеся только поворотом вокруг стола, считались различными, то каждый ряд соответствовал одному способу рассадки вокруг стола, и тогда было бы 15! способов рассадки.)

Ответ: P_{15}:15=15!:15=14!.

12. **Решение.**

а) Выбрать людей в четырехместную комнату можно C_{11}^4 способами, после этого в трехместную – C_7^3 способами, после этого в одну двухместную – C_4^2 способами, после этого во вторую двухместную люди определяются однозначно. Всего $C_{11}^4 C_7^3 C_4^2$ = 11!:(4!*3!*2!*2!) способов.

б) Выбрать людей в первую двухместную комнату – C_{10}^2 способов, после этого во вторую двухместную C_8^2, после этого в третью двухместную C_6^2, после этого в четвертую двухместную C_4^2, после этого в пятую двухместную люди определяются однозначно. Всего $C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2$ = 10!:(2!*2!*2!*2!*2!) способов.

Ответ: а) $C_{11}^4 C_7^3 C_4^2$ = 11!:(4!*3!*2!*2!), б) $C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2$ = 10!:(2!*2!*2!*2!*2!).

13. **Решение.**

а) Для первого юноши девушку в пару можно выбрать 7 способами, после этого для второго юноши – 6 способами, после этого для третьего – 5 способами, и так далее. Всего есть 7*6*5*4*3*2*1=7!=P_7 способов разбить на пары 7 юношей и 7 девушек..

б) Выбрать людей в первую пару можно 14*13:2 способами, после этого во вторую пару 12*11:2 способами, в третью пару – 10*9:2 способами, и так далее. А так как порядок пар не важен, а всего пар получится 7, то разбить 14 школьников на пары можно (14*13:2)*(12*11:2)*…*(4*3:2)*(2*1:2):7! = 14!:2^7:7! способами.

Ответ: а) 7!, б) 14!:2^7:7!.

14. Решение.

В первую команду 5 человек можно выбрать C_{15}^5 способами, после этого во вторую команду – C_{10}^5 способами, после этого в третью команду люди определяются однозначно (оставшиеся 5 человек). Так как порядок команд не важен, то есть $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 : 3!$ способов разбить 15 человек на 3 команды.

Ответ: $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 : 3!$.