

6 база. Принцип Дирихле. Часть 2.

1. Доказательство.

Разность двух чисел делится на 2 тогда и только тогда, когда оба числа четные или оба числа нечетные. Значит, нужно доказать, из любых трех целых чисел можно найти 2 числа одинаковой четности.

Предположим, что это не так: найдутся такие три числа, среди которых нет двух чисел одинаковой четности, а значит, все числа разной четности. Так как видов четности всего два (четное и нечетное), то тогда в этом наборе не более двух чисел. Это противоречит тому, что их три. Значит, предположение неверно, и среди любых трех целых чисел найдутся два одинаковой четности.

Доказано.

2. Доказательство.

Предположим, что это не так: среди 82 кубиков нельзя выбрать ни 10 кубиков, выкрашенных в разные цвета, ни 10 кубиков одного цвета. Тогда среди всех кубиков есть не более 9 кубиков разных цветов и не более 9 кубиков каждого цвета. Значит, всего кубиков не более $9 \cdot 9 = 81$, что противоречит условию задачи. Значит, предположение неверно, и среди 82 кубиков всегда можно выбрать 10 кубиков, выкрашенных в разные цвета, или 10 кубиков одного цвета.

Доказано.

3. Доказательство.

Предположим, что это не так: каждая девочка вырезала менее 5 одинаковых и менее 5 разных флажков. То есть каждая девочка вырезала не более 4 разных видов флажков и не более 4 флажков каждого вида. Тогда каждая девочка вырезала не более $4 \cdot 4 = 16$ флажков, а вместе три девочки вырезали не более $3 \cdot 16 = 48$ флажков. Получили противоречие с условием задачи. Значит, предположение неверно, и хотя бы одна из девочек вырезала пять одинаковых флажков или пять разных.

Доказано.

4. Доказательство.

Предположим, что это не так: грустных мартышек в лесу менее четырех, то есть 3 или меньше. Тогда весёлых мартышек в лесу не менее $7 - 3 = 4$. Значит, веселые мартышки съели не менее $4 \cdot 12 = 48$ орехов, а это противоречит тому, что орехов всего 47. Значит, предположение неверно, и в лесу не менее четырёх грустных мартышек.

Доказано.

5. Доказательство.

Предположим, что это не так: никто из 17 детей не съел количество конфет, делящееся на 5. Тогда, так как каждый съел хотя бы 1 конфету, каждому досталось разное количество конфет, и никто не съел делящееся на 5 количество конфет, то наименьшее общее количество съеденных конфет равно:

$$1+2+3+4+6+7+8+9+11+12+13+14+16+17+18+19+21=181.$$

Получили противоречие с условием задачи, так как по условию дети съели 180 конфет. Значит, предположение неверно, и кто-то из детей съел делящееся на 5 количество конфет.

Доказано.