5 профи. Лемма о рукопожатиях. Часть 2.

1. Решение.

Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Тогда, если бы заболевший участник не выбыл, то каждый сыграл по n-1 партий, а всего в турнире было бы сыграно n(n-1):2 партий.

Так как из-за выбывшего участника было сыграно меньше партий, то $n(n-1):2>24$, или $n(n-1)>48$. Последовательным перебором натуральных чисел в порядке возрастания можно установить, что это неравенство выполняется при $n\geq8$.

С другой стороны, выбывший участник не мог сыграть больше n-1 партий, значит, общее количество партий из-за выбывшего участника не могло уменьшиться больше чем на n-1. Это значит, что $n(n-1):2 – 24 \leq n-1$ (разница между запланированным и реальным количеством партий не больше n-1). Умножим обе части неравенства на 2, получим: $n(n-1) – 48 \leq 2(n-1)$, или $n(n-1)-2(n-1)\leq48$, или $(n-2)(n-1)\leq48$. Последовательным перебором натуральных чисел в порядке возрастания можно установить, что это неравенство выполняется при $n\leq8$.

Таким образом, мы получили, что $n\geq8$ и $n\leq8$, значит, n=8. Значит, в турнире участвовало 8 шахматистов, а всего было запланировано 8*7:2=28 партий. Так как было сыграно 24 партии, то 28-24=4 партии не были сыграны, это партии выбывшего игрока. Так как он должен был, как и все, сыграть 7 партий, а сыграл на 4 партии меньше, то он сыграл 7-4=3 партии.

Ответ: 8 шахматистов, 3 партии.

2. Решение.

Из угловых клеток доски король за 1 ход может попасть только на 3 клетки. Значит, 4 вершины графа, соответствующие угловым клеткам, будут иметь степень 3.

Из боковых, но не угловых клеток доски король за 1 ход может попасть на 5 клеток. Значит, 6*4=24 вершины графа, соответствующие боковым клеткам, будут иметь степень 5.

Из остальных клеток доски король за 1 ход может попасть на 8 клеток. Значит, остальные 36 вершин графа будут иметь степень 8.

Количество ребер графа – это половина сумма степеней вершин. Значит, в этом графе (4*3+24*5+36*8):2=210 ребер.

Ответ: 210 ребер.

3. Доказательство.

Рассмотрим граф, в котором вершины – это джентльмены клуба, две вершины соединены ребром, если соответствующие джентльмены являются друзьями. В этом графе каждая вершина имеет степень 1, то есть нечетную степень. Значит, по лемме о рукопожатиях, количество вершин в этом графе четно. А значит, в этом клубе четное число джентльменов.

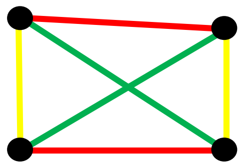
Аналогично можно рассмотреть и граф, в котором вершины – это джентльмены клуба, а ребра соединяют вершины, соответствующие врагам. В этом графе тоже все вершины имеют степень 1, а значит, количество вершин в этом графе четно.

Доказано.

4. Решение.

а) Предположим, что все ребра графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы все ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета. Рассмотрим часть графа (подграф), состоящую из всех вершин исходного графа и ребер только *одного цвета*. Эта часть тоже представляется собой граф с 7 вершинами, причем степень каждой вершины равна 1. Сумма степеней вершин такого графа равна 7, а это противоречит лемме о рукопожатиях. Значит, предположение неверно, и раскрасить таким образом ребра графа невозможно.

б) Полный граф с 4 вершинами можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы из каждой вершины выходили ребра всех трех цветов:



Ответ: а) нельзя, б) можно.

5. Доказательство.

Пусть компьютеры – это вершины графа, а соединения между компьютерами – ребра графа. Тогда сумма степеней вершин этого графа равна 3*4+8*N, где N – количество вершин степени 8 (компьютеров, соединенных с 8 другими).

Если убрать 1 ребро (соединение компьютеров), то сумма степеней вершин уменьшится на 2 и станет равна 10+8N.

Допустим, что после удаления ребра граф распался на две одинаковые части. Тогда сумма степеней вершин в каждой части равна (10+8N):2=5+4N. 5+4N = это нечетное число. Получили, что сумма степеней вершин в каждом из двух получившихся графов нечетна. Это противоречит лемме о рукопожатиях.

Значит, предположение неверно, и нельзя убрать одно соединение так, что сеть распадется на две, одинаковые по соединениям.

Доказано.