Занятие номер	Класс	Тема
9	5 профи	Графы. Лемма о рукопожатиях. Часть 1

1. Решение.

Изобразим схему дорог между усадьбами джентльменов в виде графа, где вершины – это усадьбы, ребра – это дороги между усадьбами. Получим полный граф с 20 вершинами.

Из каждой вершины выходит 19 ребер. Сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер. Значит, в этом графе всего 20*19:2=190 ребер.

Так как каждое ребро графа – это дорога в графстве Липшир, то в этом графстве 190 дорог.

Ответ: 190 дорог.

2. Решение.

Согласно сообщению резидента, все систему договоров можно изобразить в виде графа, где вершины – это республики, а ребра – договора между двумя республиками. При этом в графе будет 15 вершин, каждая из которых будет иметь степень 3. Значит, сумма степеней вершин этого графа равна 15*3=45 и является нечетным числом, а это противоречит тому, что в любом графе сумма степеней вершин четна.

Значит, резиденту верить нельзя.

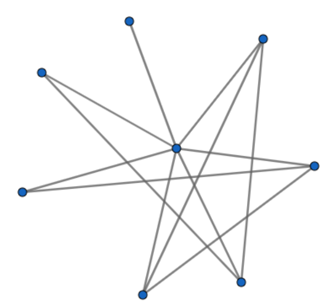
Ответ: нет.

3. Решение.

а) Такой граф не существует. Действительно, так как из восьми вершин одна имеет степень 7, то есть соединена с остальными вершинами, то не может быть вершины степени 0.

б) Такой граф не существует. Действительно, так как из восьми вершин две имеют степень 7, то есть две вершины соединены с остальными вершинами, то не может быть вершин степени меньше 2.

в) Такой граф существует. Пример на рисунке.



г) Такой граф не существует, так как три вершины (нечетное количество) имеют нечетную степень, что противоречит лемме о рукопожатиях.

Ответ: а) нет, б) нет, в) да, г) нет.

4. Доказательство.

Пусть в графстве n усадеб. Тогда из каждой усадьбы может выходить не более n-1 дорог.

Представим схему дорог графства в виде графа, в котором вершины – это усадьбы, ребра – это дороги между двумя усадьбами. В этом графе n вершин, каждая имеет степень не больше n-1.

Заметим, что если в графе есть вершина степени n-1 (то есть эта вершина соединена ребрами со всеми остальными вершинами), то нет вершины степени 0. Наоборот, если в графе есть вершина степени 0, то не может быть вершины степени n-1. Таким образом, вершины графа могут иметь степень от 0 до n-2 или от 1 до n-1 (всего n-1 значений степеней вершин).

Докажем, что в этом графе есть две вершины с одинаковыми степенями. Допустим, что это не так: все вершины графа имеют разные степени. Так как есть всего не более n-1 различных значений степеней вершин, то в этом графе не более n-1 вершин, что противоречит тому, что в графе n вершин. Значит, предположение неверно, и в этом графе найдется две вершины с одинаковыми степенями.

Заметим, что это верно для любого графа.

Тем самым мы доказали, что в графстве найдутся две усадьбы, из которых выходит поровну дорог.

Доказано.

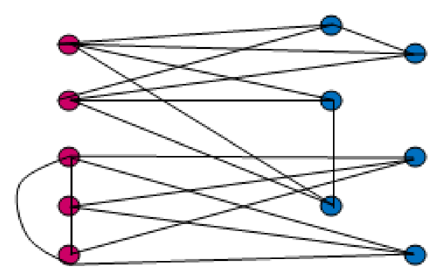
5. Решение.

а) Предположим, что это возможно: каждая девочка знакома ровно с 3 из кружковцев, а каждый мальчик ровно с 4.

Тогда построим граф: вершины соответствуют детям, если два ребенка знакомы друг с другом, то соединим соответствующие вершины ребром. Получим граф с 11 вершинами, степени пяти вершин равны 3, степени шести вершин равны 4. Сумма степеней вершин этого графа равна 5*3+6*4=39 и является нечетным числом. Это противоречит лемме о рукопожатиях.

Значит, предположение неверно, и не может случиться так, что каждая девочка знакома ровно с 3 из кружковцев, а каждый мальчик ровно с 4**.**

б) В этом случае сумма степеней вершин графа равна 5*4+6*3=38 и является четным числом. Противоречия с леммой о рукопожатиях нет, но для того, чтобы доказать, что граф с такими степенями вершин существует, нужно привести пример такого графа. Граф можно построить, например, так:



Ответ: а) не может, б) может.

6. Решение.

Предположим, можно расположить 7 монет указанным образом.

Тогда построим граф: вершины соответствуют монетам, если две монеты касаются друг друга, то соединим соответствующие вершины ребром. Получим граф с 7 вершинами, степень каждой из которых равна 3. Сумма степеней вершин этого графа равна 7*3=21 и является нечетным числом. Это противоречит лемме о рукопожатиях.

Значит, предположение неверно, и 7 монет нельзя расположить, чтобы каждая касалась ровно трех других**.**

Ответ: нельзя.

7. Доказательство.

Изобразим схему дорог страны в виде графа, где вершины – это города, ребра – это дороги между двумя городами. Получим граф, в котором степень каждой вершины равна 5 или 15.

Пусть в графе n вершин степени 5 и m вершин степени 15. Тогда сумма степеней вершин этого графа равна 5n+15m=5(n+3m)=5((n+m)+2m).

Если число городов в стране нечетно, то есть n+m нечетное число, то 5((n+m)+2m) – нечетное число (произведение нечетного числа и суммы нечетного и четного является нечетным). Это противоречит лемме о рукопожатиях. Значит, количество городов в стране четно, то есть делится на 2.

Так как количество городов в стране четно, то n+m можно представить в виде 2k, где k – целое число. Тогда сумма степеней вершин графа равна 5(2k+2m)=5*2(k+m). Количество ребер графа – это половина суммы степеней вершин, значит, в этом графе 5(k+m) ребер. Так как k+m – целое число, то количество ребер графа (а значит, дорог в стране) делится на 5.

Доказано.