

Занятие номер	Класс	Тема
8	5 профи	Графы. Часть 1.

Решение.

- Существует ли граф, в котором 9 вершин и степень каждой вершины равна 5?
- В графе 25 вершин, и среди любых трех вершин найдутся две вершины, соединенные ребром. Докажите, что в этом графе найдется вершина степени не менее 12.
- Докажите, что в любом графе есть по крайней мере две вершины одинаковой степени.
- Дан двудольный граф, в котором степень каждой вершины первой доли равна 6, а степень каждой вершины второй доли равна 3. Из этого графа удалили все ребра. На вершинах первой доли построили новый граф, причем степень каждой вершины нового графа равна 7. На вершинах второй доли тоже построили новый граф, причем степень каждой вершины нового графа равна 4. В какой доле исходного графа большее количество вершин?
- Докажите, что в любом графе с 9-ю вершинами найдутся три вершины, попарно соединенные ребрами, или в его дополнении найдутся четыре вершины, попарно соединенных ребрами.

Или:

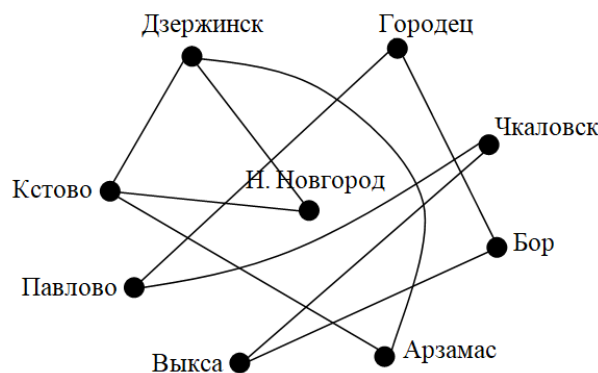
Докажите, что если в полном графе с 9 вершинами ребра раскрашены в два цвета, то найдутся три вершины, попарно соединенные ребрами одного цвета, или четыре вершины, попарно соединенные ребрами другого цвета.

Замечание.

Дополнение графа (обратный граф) — граф, имеющий то же множество вершин, что и заданный граф, но в котором две несовпадающие вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они не соединены ребром в исходно графе.

1. Решение.

Нарисуем граф, где вершины – это города Нижегородской области, ребра – это порталы между указанными городами:



Как видим, получившийся граф – несвязный, состоит из двух связных частей: Н. Новгород-Кстово-Дзержинск-Арзамас и Городец-Бор-Выкса-Павлово-Чкаловск. Нижний Новгород и Бор находятся в разных частях, значит, добраться с помощью этой системы порталов от Нижнего Новгорода до Бора невозможно.

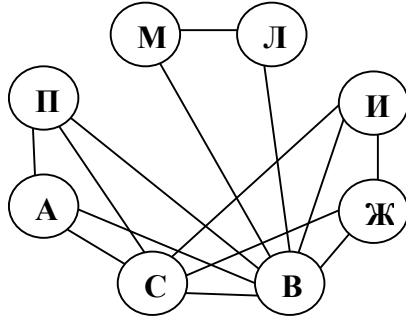
Ответ: нельзя.

2. Решение.

Построим граф, вершины которого – это девочки. Две вершины соединим ребром, если эти две девочки сыграли между собой. По условию задачи любые две вершины соединены не более чем одним ребром.

Так как Валя сыграла 7 партий, то она сыграла со всеми остальными девочками. Маша и Лена сыграли между собой и еще только с Валей, так как они обе сыграли по 2 партии. Саша сыграла 5 партий, значит, со всеми, кроме Маши и Лены. Ира играла с Валей, Сашей и Женей, Женя – с Валей, Сашей и Ирой. Остались Аня и Полина, обе они сыграли по 3 партии, обе сыграли с Валей и Сашей и больше ни с кем, кроме как друг с другом сыграть не могли.

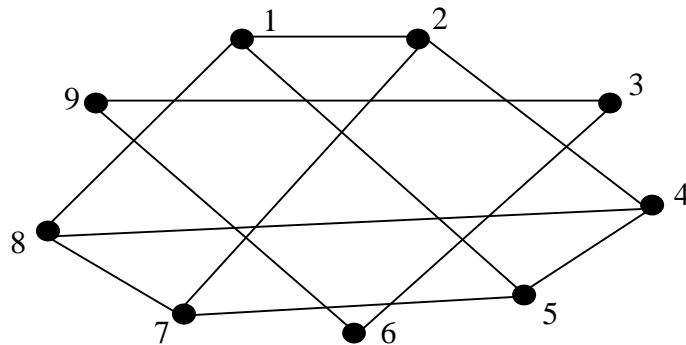
Получим такой граф, по которому можно увидеть, кто с кем сыграл:



Ответ: см. граф в решении.

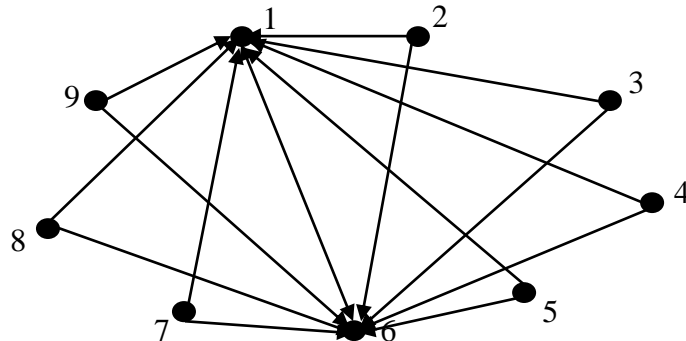
3. Решение.

а) Нарисуем схему авиалиний страны Цифра:



Как видим, получился несвязный граф, состоящий из двух связных частей, причем города 1 и 9 находятся в разных компонентах связности. Значит, добраться из города 1 в город 9 невозможно.

б) Нарисуем схему авиалиний страны Цифра. Заметим, что в этом случае нужно учитывать направление перелета, так как числа, составленных из двух одинаковых цифр, но в разном порядке, могут давать разные остатки при делении на 5.

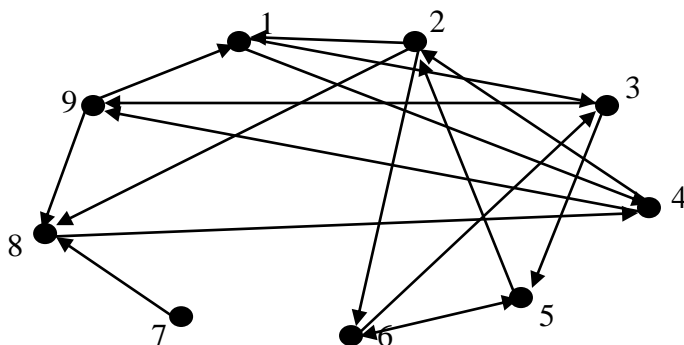


Как видим, самолетом можно добраться из любого города только в города 1 и 6. Ни в какие другие города, кроме 1 и 6, добраться самолетом невозможно. Значит, из города 1 в город 9 добраться нельзя.

Ответ: а) нельзя, б) нельзя.

4. Решение.

Нарисуем граф, где вершины – это цифры от 1 до 9. Вершины соединены стрелкой, если двузначное число, составленное из первой и второй вершин, делится на 7 или 13. Получим такой граф:

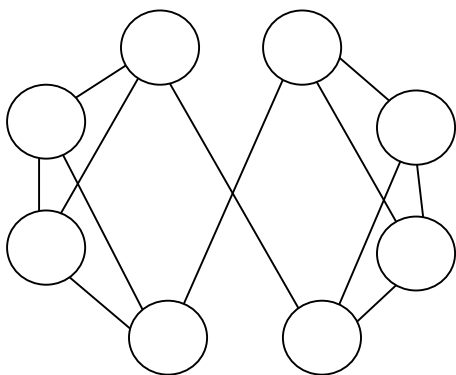


Как видим, цифры в ряд выписывать нужно с цифры 7, так как из нее стрелка только выходит. Попробуем это сделать, двигаясь по стрелкам графа: 7 – 8 – 4 – 9 – 1 – 3 – 5 – 2 – 6.

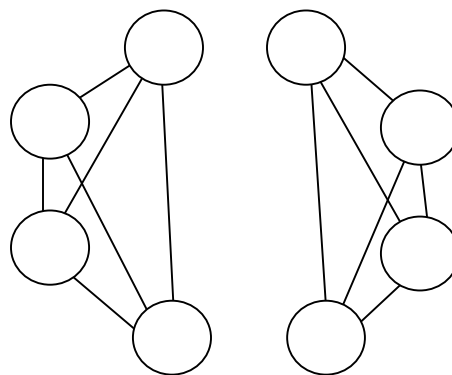
Ответ: 7 – 8 – 4 – 9 – 1 – 3 – 5 – 2 – 6.

5. Решение.

Связный граф.



Несвязный граф.



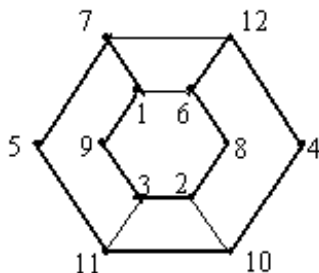
Ответ: см. решение.

6. Решение.

Занумеруем поля доски (рис. слева) и нарисуем граф (рис. в центре), где вершины соответствуют полям, а ребро проводится, если соответствующие поля отстоят на ход коня. На графе легко

построить требуемый обход (жирная линия). На рис. справа поля занумерованы уже в порядке обхода.

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	



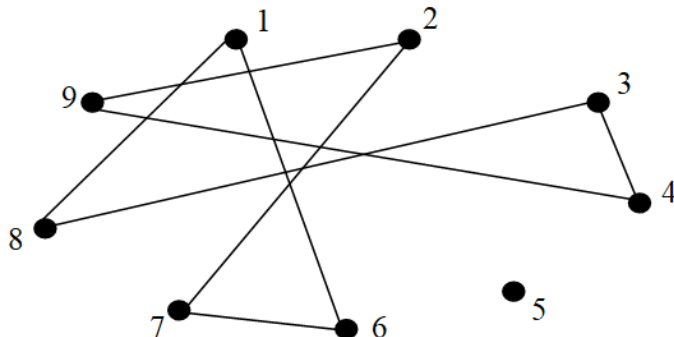
	1	4	
3	8	11	6
12	5	2	9
	10	7	

Ответ: можно.

7. Решение.

Пронумеруем клетки, как на рисунке.

Построим граф, в котором вершины соответствуют клеткам доски. Соединим две вершины ребром, если из одной в другую клетку можно попасть ходом коня. Получим такой граф:



1	2	3
4	5	6
7	8	9

Как мы видим, начиная из угловой клетки, конь ходит по циклу из 8 клеток: 1-6-7-2-9-4-3-8 или 1-8-3-4-9-2-7-6.

Сейчас на клетках 1 и 3 стоят белые кони, на клетках 7 и 9 черные кони, то есть кони расположены через 1 вершину цикла. Если будет ходить 1 конь, а остальные стоять на месте, то он сможет сделать только 1 ход. Значит, чтобы положение всех коней поменялось, нужно чтобы все кони ходили одновременно.

Переставить черных и белых коней можно так:

- 1) Черные идут на клетки 2 и 4, белые идут на клетки 6 и 8,
- 2) Черные идут на клетки 9 и 3, белые идут на клетки 7 и 1,
- 3) Черные идут на клетки 4 и 8, белые идут на клетки 2 и 6,
- 4) Черные идут на клетки 3 и 1, белые идут на клетки 9 и 7.

После выполнения этих ходов, черные окажутся на клетках 3 и 1, белые – на клетках – 9 и 1, то есть черные и белые поменяются местами.

Ответ: см. решение.

8. Решение.

Как следует из решения задачи 8, угловые кони передвигаются по циклу из 8 вершин. При этом, если коней несколько, то они должны двигаться одновременно. Но при этом порядок следования коней друг за другом по этому циклу не меняется.

Поэтому поменять местами черного и красного коней невозможно. Действительно, пусть красный конь стоит на клетке 7, а черный – на клетке 9. Тогда, когда черный окажется на клетке 7 (то есть сделает 6 шагов в одну сторону по циклу или 2 шага в другую сторону), красный окажется на клетке 1. И наоборот, когда красный окажется на клетке 9, черный окажется на клетке 3.

Ответ: это сделать невозможно.