Занятие номер	Класс	Тема
7	5 профи	Признаки делимости. Часть 1.

1. **Решение.**

Чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 0 или 5. Чтобы число делилось на 9, сумма его цифр должна делиться на 9.

Если число оканчивается на 0, получаем *970. Сумма имеющихся цифр равна 9+7+0=16. Перебрав цифры от 1 до 9, получим, что первая цифра должна быть 2, так как только в этом случае сумма цифр 2+9+7+0=18 делится на 9. Таким образом, если число оканчивается на 0, то это число 2970.

Если число оканчивается на 5, получаем *975. Сумма имеющихся цифр равна 9+7+5=21. Перебрав цифры от 1 до 9, получим, что первая цифра должны быть 6, так как только в этом случае сумма цифр 6+9+7+5=27 делится на 9. Таким образом, если число оканчивается на 5, то это число 6975.

Ответ: 2970 и 6975.

2. **Решение.**

Пусть женщин в селе 1 часть, тогда мужчин – 4 таких части, а все жители села – это 5 одинаковых частей. Значит, общее количество жителей села делится на 5, и не может быть равно 897, так как 897 не делится на 5.

Ответ: нет.

3. **Доказательство.**

Заметим, что каждое слагаемое суммы представляет собой произведение трех последовательных чисел. Среди любых трех последовательных чисел обязательно есть такое, которое делится на 3. Значит, в каждом слагаемом есть число, делящееся на 3, и, следовательно, каждое слагаемое делится на 3. Тогда и вся сумма в левой части неравенства делится на 3.

Число 19891988 не делится на 3, так как сумма его цифр не делится на 3. Значит, сумма в левой части неравенства не может быть равна числу в правой части неравенства, что и требовалось доказать.

Доказано.

4. **Доказательство.**

По признаку делимости на 11, число ДДЕЕ делится на 11.
Числа АВ и БГ не делятся на 11, так как состоят из разных цифр, а двузначные числа, делящиеся на 11, состоят из одинаковых цифр.

Число 11 – простое число. Если АВ не делится на 11 и БГ не делится на 11, то АВ*БГ не делится на 11. Значит, это произведение не может быть равно ДДЕЕ.

Доказано.

5. Решение.

Если число больше некоторого другого числа (последней цифры) в 5 раз, то оно делится на 5. Значит, это число заканчивается цифрой 0 или цифрой 5.

Если последняя цифра 0, то искомое число – 0*5=0, но 0 – не натуральное число, поэтому не является решением.

Если последняя цифра 5, то искомое число – 5*5=25.

Получили единственное натуральное число, удовлетворяющее условию, - число 25.

Ответ: 25.

6. Решение.

Число делится на 4, если две последние цифры образуют двузначное число, делящееся на 4. Перебрав все возможные двузначные числа, состоящие из двоек и троек, получим, что на 4 делится только число 32. Значит, искомый код должен заканчиваться на 32.

Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Учитывая, что последние две цифры – это 32, и двоек больше, получим, что сумма цифр семизначного числа не меньше 2+2+2+2+2+3+2=15 и не больше 2+2+2+3+3+3+2=17. На 3 делится только сумма цифр, равная 15.

Значит, искомый код состоит из шести цифр 2 и одной цифры 3, причем заканчивается на 32. Единственный подходящий вариант кода – 2222232.

Ответ: 2222232.

7. Решение.

Так как цифр всего 10, то это число будет десятизначным.

Чтобы оно делилось на 11, нужно, чтобы разность суммы цифр на нечетных местах и суммы цифр на четных местах делилась на 11 (знакопеременная сумма цифр делилась на 11).

Сумма цифр от 0 до 9 равна 45. Нужно разбить эту сумму на 2 числа так, чтобы разность их была кратна 11. Это могут быть числа 28 и 17 или 39 и 6.

Теперь нужно составить число так, чтобы сумма цифр на нечетных местах была, например, 28, а на четных – 17 (заметим, что для 39 и 6 такое число придумать не удастся). Например, это может быть число **9**1**8**2**7**3**4**5**0**6.

Ответ: см. решение.

5 профи. Признаки делимости. Часть 2.

1. **Решение.**

Сумма цифр числа 593421 равна 24, 24 делится на 3. Значит, число 593421 делится на 3. При умножении на 3 мы получим число, делящееся на 2. Если число, делящееся на 3, записать теми же цифрами в обратном порядке, то получим число, делящееся на 3, так как сумма цифр останется прежней и будет делиться на 3. Таким образом, после того, как мы сложим исходное число, умноженное на 2, и число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, мы получим снова число, делящееся на 3.

Так как на каждом шаге мы повторяем одни и те же действия, то каждый раз мы будем получать число, делящееся на 3. Кроме того, с каждым шагом числа увеличиваются (не может оказаться, что в результате получили 3). Значит, ни на каком шаге получить простое число невозможно.

Ответ: не могло.

2. **Доказательство.**

Признак делимости на 25: если число заканчивается цифрами 00, 25, 50 или 75, то оно делится на 25.

Докажем это.

Если число заканчивается на 00, то оно состоит их целого числа сотен. Каждая сотня (число 100) делится на 25. Значит, любое количество сотен делится на 25.

Если число заканчивается на 25, то оно состоит суммы целого количества сотен и 25. Любое количество сотен делится на 25 и 25 делится на 25, значит, и их сумма делится на 25.

Если число заканчивается на 50, то оно состоит суммы целого количества сотен и 50. Любое количество сотен делится на 25 и 50 делится на 25, значит, и их сумма делится на 25.

Если число заканчивается на 75, то оно состоит суммы целого количества сотен и 75. Любое количество сотен делится на 25 и 75 делится на 25, значит, и их сумма делится на 25.

Докажем теперь, что если число делится на 25, то оно заканчивается на 00, 25, 50 или 75.

Представим число в виде 100*N + 10*M + K, где N – количество целых сотен в числе, M – оставшееся количество целых десятков, K – оставшееся количество единиц. Число 10*M + K – это разность самого числа и 100*N. Уменьшаемое (само число) делится на 25, вычитаемое (целое количество сотен) делится на 25, значит, и разность делится на 25. То есть 10*M + K – это двузначное число, которое делится на 25. Это выполняется, если M и K равны 2 и 5, 5 и 0, 7 и 5, а так же в случае, когда M и K равны 0.

Доказано.

3. **Решение.**

Знакопеременная сумма числа АННА равна А-Н+Н-А=0, 0 делится на 11. Значит, число АННА делится на 11 и не может быть простым.

Число ЗЕРКАЛЬНЫЙ состоит из 10 различных цифр, то есть в этом числе использованы все цифры от 0 до 9. Сумма цифр от 0 до 9 равна 45, 45 делится на 3 и на 9. Значит, число ЗЕРКАЛЬНЫЙ делится на 3 и на 9 и не может быть простым.

Ответ: не может.

4. Решение.

В 19-значном числе 10 цифр стоят на нечетных местах и 9 цифр – на четных. Если мы сможем написать цифры так, что сумма цифр на 10 карточках будет отличаться от суммы цифр на оставшихся 9 карточках на 0, 11 или любое другое число, делящееся на 11, то мы сможем составить число, делящееся на 11.

Например, на 10 карточках можно написать цифру 2, на 9 карточках – цифру 1. Получим число 2121212121212121212, которое делится на 11 по признаку делимости на 11.

Ответ: можно.

5. Доказательство.

Рассмотрим число $\overline{A_1A_2A_3...A_n}$, где n – нечетное число. Пусть A_k – это цифра посередине этого числа. В числе, записанном теми же цифрами в обратном порядке, эта цифра тоже будет стоять посередине числа.

Тогда разность этого числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке равна $A_1A_2A_3...A_n – A_nA_{n-1}A_{n-2}...A_1$.

Разложим каждое число на разрядные слагаемые и сгруппируем слагаемые с одинаковыми коэффициентами. Получим:

$A_1(1000…0 – 1) + A_2(100…0 – 10) + A_3(10…0 – 100) + … + A_k(10…0 – 10..0) – … – A_{n-2}(10…0 – 100) – A_{n-1}(100…0 – 10) – A_n(1000…0 – 1)$.

В скобках при A_1 и A_n получим число, состоящее из n-1 цифр 9, в скобках при A_2 и A_{n-1} получим число, состоящее из n-3 цифр 9 и 0 на конце, в скобках при A_3 и A_{n-2} получим число, состоящее из n-5 цифр 9 и двух нулей на конце, …, в скобках при A_k получим 0.

Таким образом, в каждых скобках мы получаем число, состоящее из четного количества цифр 9 и нескольких нулей на конце. Все эти числа делятся на 9 и на 11 по признакам делимости. Значит, и все выражение делится на 11. Так как 9 и 11 взаимно простые числа, то все выражение делится на 9*11=99.

Доказано.