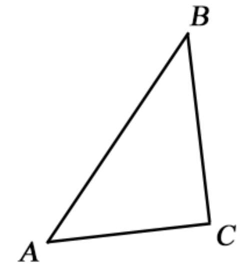
Занятие номер	Класс	Тема
6	8 база	Неравенства в треугольнике.

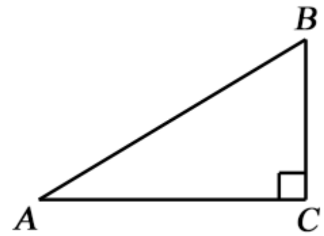
1. **Решение.**



В любом треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол.
Так как AB>BC>AC, то ∠C>∠A>∠B.

Ответ: самый большой угол – ∠C, самый маленький – ∠B.

2. **Решение.**



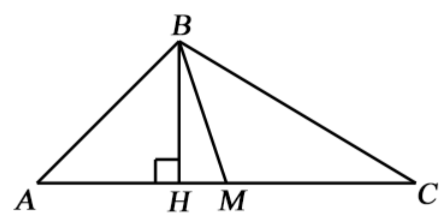
Гипотенуза – это сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла. Значит, в треугольнике ABC ∠C=90°.

Так как угол C прямой, то углы A и B острые. Действительно, внешний угол треугольника ABC, смежный с ∠C, является прямым, и он больше каждого из двух других углов, не смежных с ним.

Таким образом, самый большой угол в треугольнике – это ∠C. По условию, ∠B>∠A. В любом треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона. Так как ∠C>∠B>∠A, то AB>AC>BC.

Ответ: самая большая сторона – AB, самая маленькая – BC.

3. **Доказательство.**



Пусть BH и BM – высота и медиана треугольника ABC соответственно.

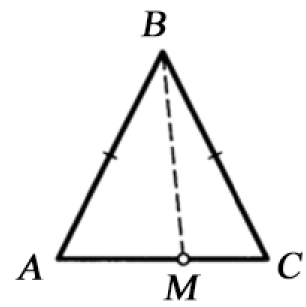
Если треугольник ABC равнобедренный с основанием AC, то BH и BM совпадают, значит BH=BM.

В остальных случаях BH – это перпендикуляр в прямой AC, а BM – наклонная к прямой AC. Так как перпендикуляр меньше наклонной, то BH<BM. Или, по-другому, в прямоугольном треугольнике BHM BM лежит напротив прямого угла, а BH – напротив острого, значит, BH<BM.

Таким образом, в любом треугольнике медиана не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

Доказано.

4. Доказательство.



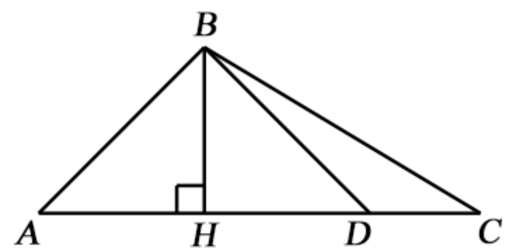
Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором AB=BC, точка M – произвольная точка на отрезке AC. Докажем, что BM<AB.

По свойству равнобедренного треугольника, ∠A=∠C.

Рассмотрим ∠BMA. Это внешний угол треугольника BMC, смежный с ∠BMC, значит, ∠BMA > ∠C. Так как ∠C=∠A, то ∠BMA > ∠A. В любом треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона. В треугольнике ABM ∠A < ∠BMA, значит, BM<AB.

Доказано.

5. Доказательство.



Пусть BH – высота треугольника ABC, а ∠A>∠C. Докажем, что AH<HC.

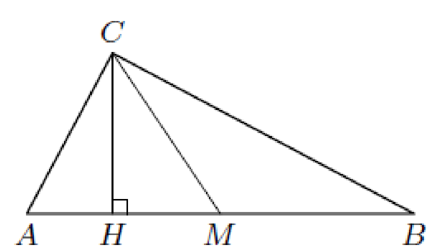
В прямоугольном треугольнике ABH ∠ABH=90° – ∠A, в прямоугольном треугольнике CBH ∠CBH=90° – ∠C. Так как ∠A>∠C, то ∠ABH<∠CBH.

От луча BH в полуплоскость, где находится точка C, отложим ∠HBD, равный ∠ABH. Так как ∠HBD<∠CBH, то луч BD лежит внутри угла CBH, а значит, пересекает отрезок CH (точка D – точка пересечения этого луча и отрезка CH). Так как т. D лежит на отрезке CH, то HD<CH.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH и DBH. Они равны по катету и прилежащему острому углу (BH – общий катет, ∠ABH=∠DBH по построению). Значит, AH=HD. Так как AH=HD, HD<CH, то AH<CH.

Доказано.

6. Решение.



Пусть CH – высота прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB. Проведем медиану CM. Тогда CH – катет прямоугольного треугольника CHM с гипотенузой CM, поэтому CH < CM, а так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то CH < 0,5AB.

Предположим, что существует прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна 10, а проведенная к ней высота равна 6. Тогда CH=6, AB=10 и CH>0,5AB, то есть получаем противоречие доказанному неравенству. Значит, такой треугольник не существует.

Ответ: не существует.

7. Доказательство.

Пусть a, b и c – длины сторон треугольника и $a \geq b \geq c$.

По неравенству треугольника имеем:

$a < b+c$, отсюда, вычитая из обеих частей неравенства b или c, получаем: $a–b < c$, $a–c < b$.

Кроме того, по неравенству треугольника имеем:

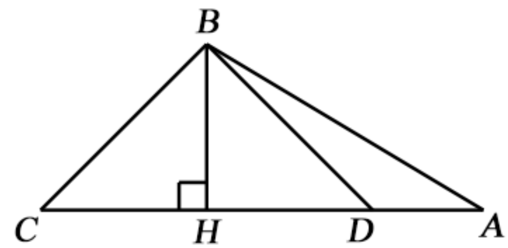
$b < a+c$, отсюда, вычитая из обеих частей неравенства c, получаем: $b–c < a$.

Таким образом, $a > b–c$, $b > a–c$, $c > a–b$.

Доказано.

8. Доказательство.

Пусть BH – высота треугольника ABC.



В задаче 5 мы доказали, что если ∠A<∠C, то AH>HC.

Докажем теперь, что если AH>HC, то ∠A<∠C.

На луче HA отложим отрезок HD=CH. Так как AH>CH, то точка D лежит на отрезке AH.

Прямоугольные треугольники CBH и DBH равны по двум катетам (BH – общий катет, CH=HD по построению). Значит, ∠BDH=∠C.

Так как ∠BDH – внешний угол треугольника BAD, то ∠A<∠BDH. Так как ∠BDH=∠C, то ∠A<∠C.

Доказано.

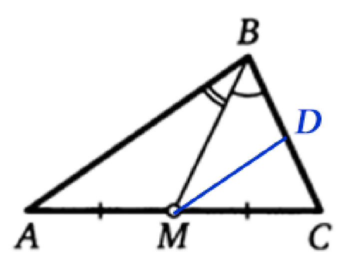
9. Доказательство.

Так как ∠A < ∠B, то BC < AC (напротив большего угла лежит большая сторона). По неравенству треугольника, AB < AC + BC. Получаем: AB < AC + BC < AC+AC = 2AC. Так как 2AC > AB, то AC > ½AB.

Доказано.

10. Решение.

Через точку M проведем прямую MD, параллельную AB.



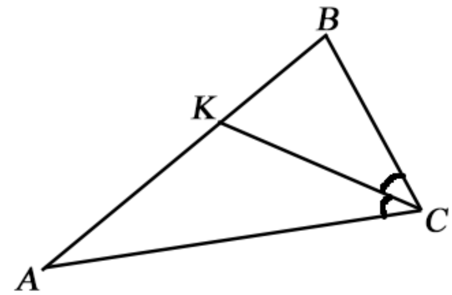
Тогда, так как точка M – середина AC, то отрезок MD – средняя линия треугольника ABC. Значит, MD=½AB, а BD=½BC. Так как AB>BC, то MD>BD. Значит, в треугольнике MBD ∠MBD>∠BMD.

Так как AB||MD, то ∠BMD=∠ABM как накрест лежащие.

Так как ∠MBD>∠BMD и ∠BMD=∠ABM, то ∠MBD>∠ABM (а ∠MBD – это и есть ∠CBM).

Ответ: ∠CBM>∠ABM.

Домашнее задание 6.



Доказательство.

Так как AC > BC, то ∠B > ∠A. Так как CK – биссектриса, то ∠ACK=∠BCK.

В треугольнике AKC ∠AKC=180° – ∠A – ∠ACK, в треугольнике BKC ∠BKC = 180° – ∠B – ∠BCK.

Так как ∠ACK=∠BCK, а ∠B > ∠A, то ∠AKC > ∠BKC. Так как углы AKC и BKC смежные, и ∠AKC > ∠BKC, то ∠AKC больше половины развернутого угла (тупой), а ∠BKC меньше половины развернутого угла (острый).

Доказано.