Занятие номер	Класс	Тема
4	8 база	Остатки степеней.

1. Решение.

$4^{2020} \equiv_3 1^{2020} = 1$

$6^{2020} \equiv_7 (-1)^{2020} = 1$

Ответ: 1, 1.

2. Решение.

$9^{121} + 13^{121} \equiv_{11} (-2)^{121} + 2^{121} = -2^{121} + 2^{121} = 0$.

Ответ: 0.

3. Решение.

а) $2^{100} = 2^{3*33+1} = (2^3)^{33}*2 = 8^{33}*2 \equiv_9 (-1)^{33}*2 = -2 \equiv_9 7$.

б) $33^{77} + 77^{33} \equiv_9 6^{77} + 5^{33} = 6^{2*38+1} + 5^{3*11} = 6*36^{38} + 125^{11} \equiv_9 6*0^{38} + (-1)^{11} = 0 – 1 = -1 \equiv_9 8$.

в) $7^1 \equiv_9 7$, $7^2 \equiv_9 4$, $7^3 \equiv_9 1$. При возведении числа 7 в натуральную степень остатки повторяются циклично по 3: 7-4-1…

$7^7 \equiv_3 1^7 = 1$. Значит, при возведении числа 7 в степень 7^7 остаток будет равен первому остатку цикла, то есть 7.

$7^{7^7} \equiv_9 7$.

Ответ: а) 7, б) 8, в) 7 .

4. Решение.

а) Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 5:

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1

Как видим, при делении на 5 квадрат числа может давать только остатки 0, 1 или 4.

Число 5q + 2 при делении на 5 дает остаток 2. Значит, оно не может быть квадратом целого числа.

б) Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 3:

n	0	1	2
n^2	0	1	1

Как видим, при делении на 3 квадрат числа может давать только остатки 0 или 1.

Число $3q – 1 \equiv_3 – 1 \equiv_3 2$, то есть при делении на 3 дает остаток 2. Значит, оно не может быть квадратом целого числа.

в) Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 6:

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	3	4	1

Как видим, при делении на 6 квадрат числа может давать только остатки 0, 1, 3 или 4.

Число $6q + 2 \equiv_6 2$, то есть при делении на 6 дает остаток 2. А число $6q - 1 \equiv_6 -1 \equiv_6 5$, то есть при делении на 6 дает остаток 5. Значит, эти числа не могут быть квадратами целого числа.

Ответ: а) нет, б) нет, в) нет .

5. **Решение.**

$7^1 \equiv_{15} 7$, $7^2 \equiv_{15} 4$, $7^3 \equiv_{15} 13$, $7^4 \equiv_{15} 1$ ... При возведении числа 7 в натуральную степень остатки при делении на 15 повторяются циклично по 4: 7-4-13-1…

$777 \equiv_4 1$. Значит, при возведении числа 7 в степень 777 остаток при делении на 15 будет равен первому остатку цикла, то есть 7.

Ответ: 7.

6. **Решение.**

$2^0 = 1 \equiv_3 1$, $2^1 \equiv_3 -1$, $2^2 \equiv_3 1$, $2^3 \equiv_3 -1$ ... Таким образом, 2 в четной степени по модулю 3 сравнима с 1, 2 в нечетной степени – с -1.

Значит, сумма $1+2+2^2 +...+2^{2008} \equiv_3 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 = 1$. То есть эта сумма при делении на 3 дает остаток 1, то есть на 3 не делится.

Ответ: нет.

7. **Доказательство.**

$2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2006\cdot2008 - 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007 \equiv_{2009} (-2007)\cdot(-2005)\cdot(-2003)\cdot\ldots\cdot(-3)\cdot(-1) - 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007$

Нечетных чисел от 1 до 2007 всего 1004, то есть четное количество. Значит, в первом произведении все «минусы» дадут «плюс»:

$(-2007)\cdot(-2005)\cdot(-2003)\cdot\ldots\cdot(-3)\cdot(-1)-1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007=2007\cdot2005\cdot2003\cdot\ldots\cdot3\cdot1-1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007=0.$

Таким образом, $2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2006\cdot2008 - 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007 \equiv_{2009} 0$, значит, это выражение делится на 2009.

Доказано.

8. **Доказательство.**

Докажем, что остатки этих выражений при делении на соответствующие числа равны 0.

а) $18^n - 11^n \equiv_7 4^n - 4^n = 0$.

б) $7^n + 5^{2n+1} = 7^n + 5*(5^2)^n = 7^n + 5*25^n \equiv_3 1^n + 2*1^n = 1+2*1 = 3 \equiv_3 0$.

в) $2^{3n} - 1 = 8^n - 1 \equiv_7 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$.

г) $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 3^2*(3^2)^n + 2*(2^6)^n = 9*9^n + 2*64^n \equiv_{11} (-2)*(-2)^n + 2\ (-2)^n = 0$.

д) $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2*11^n + 12*(12^2)^n = 121*11^n + 12*144^n \equiv_{133} (-12)*11^n + 12*11^n = 0$.

Доказано.

9. **Доказательство.**

Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 3:

n	0	1	2

n^2	0	1	1

Как видим, при делении на 3 квадрат числа может давать только остатки 0 или 1, причем, 0 – только в случае, если само число делится на 3.

Так как $x^2 + y^2$ делится на 3 (то есть дает остаток 0 при делении на 3), то числа x^2 и y^2 дают остатки 0 при делении на 3 (иначе сумма $x^2 + y^2$ дает остаток 1 или 2 при делении на 3). А это возможно только в том случае, если x и y делятся на 3.

Доказано.

Домашнее задание 4.

Доказательство.

Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 8:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Как видим, при делении на 8 квадрат числа может давать только остатки 0, 1 или 4.

Число 7 – нечетное, значит, его можно представить в виде суммы трех нечетных чисел или одного нечетного и двух четных.

Рассмотрим все возможные такие суммы из чисел 0, 1 и 4:

1+1+1 = 3 (сумма трех нечетных чисел)

1+0+0 = 1 (сумма нечетного и двух четных чисел)

1+0+4 = 5 (сумма нечетного и двух четных чисел)

1+4+4 = 9 $\equiv_7$ 2 (сумма нечетного и двух четных чисел)

Как видим, во всех случаях сумма остатков квадратов трех чисел не равна 7.

Доказано.