Занятие номер	Класс	Тема
5	8 профи	Транснеравенство

1. Решение.

а) Так как $a \geq b \geq c > 0$, то можно возвести это неравенство в натуральную степень, в том числе в степень 3, знаки неравенства сохранятся: $a^3 \geq b^3 \geq c^3 > 0^3$. Таким образом, $a^3 \geq b^3 \geq c^3$.

б) Так как $a \geq b \geq c > 0$, то, по правилу сравнения дробей, $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$.

в) Так как $a \geq b \geq c > 0$, то $a^2 \geq b^2 \geq c^2 > 0^2$ (см. п. а).

Так как $b^2 \geq c^2 > 0$ и $a^2 > 0$, то, по свойствам неравенств, обе части первого неравенства можно умножить на число a^2, получим: $a^2b^2 \geq a^2c^2 > 0$.

Так как $a^2 \geq b^2 > 0$ и $c^2 > 0$, то, по свойствам неравенств, обе части первого неравенства можно умножить на число c^2, получим: $a^2c^2 \geq b^2c^2 > 0$.

Таким образом, $a^2b^2 \geq a^2c^2 \geq b^2c^2 > 0$.

г) Приведем дроби к общему знаменателю abc: $\frac{b^2}{abc}, \frac{a^2}{abc}, \frac{c^2}{abc}$. Так как $a^2 \geq b^2 \geq c^2 > 0$, то, по правилам сравнения дробей, $\frac{a^2}{abc} \geq \frac{b^2}{abc} \geq \frac{c^2}{abc}$. Значит, $\frac{a}{bc} \geq \frac{b}{ac} \geq \frac{c}{ab}$.

Ответ: а) $a^3 \geq b^3 \geq c^3$, б) $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$, в) $a^2b^2 \geq a^2c^2 \geq b^2c^2$, г) $\frac{a}{bc} \geq \frac{b}{ac} \geq \frac{c}{ab}$.

2. Доказательство.

Пусть $a \geq b \geq c > 0$, тогда можно возвести это неравенство в натуральную степень, в том числе в степень 3, знаки неравенства сохранятся: $a^3 \geq b^3 \geq c^3 > 0^3$.

Для последовательностей $a \geq b \geq c$ и $a^3 \geq b^3 \geq c^3$ выполняется транснеравенство, а именно:

$aa^3+bb^3+cc^3 \geq ac^3+ba^3+cb^3$, или $a^4+b^4+c^4 \geq a^3b+b^3c+c^3a$.

Доказано.

3. Доказательство.

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$. Тогда, по правилу сравнения дробей, $\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{a_{n-1}} \geq \cdots \geq \frac{1}{a_1} > 0$.

Для последовательностей $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ и $\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{a_{n-1}} \geq \cdots \geq \frac{1}{a_1}$ выполняется транснеравенство, а именно вторая его часть:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{a_n}{a_n} = 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n.$$

Доказано.

4. Доказательство.

Пусть $x \geq y \geq z > 0$.

Прибавим z к обеим частям неравенства $x \geq y$, получим: $z+x \geq y+z$.

Прибавим x к обеим частям неравенства $y \geq z$, получим: $x+y \geq z+x$.

Таким образом, $x+y \geq z+x \geq y+z>0$. Тогда, по правилу сравнения дробей, $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x} \geq \frac{1}{x+y} > 0$.

Для последовательностей $x \geq y \geq z$ и $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x} \geq \frac{1}{x+y}$ выполняется транснеравенство, а именно:

$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

Доказано.

5. Доказательство.

Пусть $a \geq b \geq c > 0$, тогда $a+1 \geq b+1 \geq c+1 > 0$ и $\frac{1}{c+1} \geq \frac{1}{b+1} \geq \frac{1}{a+1} > 0$.

$\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}, \frac{b}{b+1} = 1 - \frac{1}{b+1}, \frac{c}{c+1} = 1 - \frac{1}{c+1}$. Так как $\frac{1}{c+1} \geq \frac{1}{b+1} \geq \frac{1}{a+1}$, то, умножив все части этого неравенства на -1 (при этом знаки неравенства поменяются на противоположные) и прибавив 1, получим: $1 - \frac{1}{c+1} \leq 1 - \frac{1}{b+1} \leq 1 - \frac{1}{a+1}$, значит, $\frac{c}{c+1} \leq \frac{b}{b+1} \leq \frac{a}{a+1}$.

Для последовательностей $(a+1) \geq (b+1) \geq (c+1)$ и $\frac{a}{a+1} \geq \frac{b}{b+1} \geq \frac{c}{c+1}$ выполняется транснеравенство, а именно:

$\frac{a(a+1)}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}$, или $a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}$.

Доказано.

6. Доказательство.

Пусть $a \geq b \geq c > 0$, тогда можно возвести это неравенство в натуральную степень, в том числе в степень 2, знаки неравенства сохранятся: $a^2 \geq b^2 \geq c^2 > 0^2$.

Для последовательностей $a \geq b \geq c$ и $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ выполняется транснеравенство, а именно:

$aa^2+bb^2+cc^2 \geq ac^2+ba^2+cb^2$ и $aa^2+bb^2+cc^2 \geq ab^2+bc^2+ca^2$,

или $a^3+b^3+c^3 \geq ac^2+ba^2+cb^2$ и $a^3+b^3+c^3 \geq ab^2+bc^2+ca^2$.

Сложим два полученных неравенства, получим:

$2(a^3+b^3+c^3) \geq ac^2+ba^2+cb^2+ab^2+bc^2+ca^2$, или $2(a^3+b^3+c^3) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$.

Доказано.

7. Доказательство.

Для последовательностей $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ и $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ для всех возможных перестановок чисел b_i выполняется транснеравенство, в частности выполняются следующие $n-1$ неравенств:

$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geq a_1b_2+a_2b_3+\ldots+a_{n-1}b_n+a_nb_1$

$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geq a_1b_3+a_2b_4+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_2$

…

$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geq a_1b_n+a_2b_1+\ldots+a_{n-1}b_{n-2}+a_nb_{n-1}$

Сложим все эти неравенства и прибавим к обеим частям неравенства $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$, получим:

$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n) \geq (a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$.

Доказано.

8. Доказательство.

Вообще, это неравенство Чебышева (см. задачу 7) для последовательностей $a \geq b \geq c > 0$ *и* $a^2 \geq b^2 \geq c^2 > 0$.

Пусть $a \geq b \geq c > 0$, тогда можно возвести это неравенство в натуральную степень, в том числе в степень 2, знаки неравенства сохранятся: $a^2 \geq b^2 \geq c^2 > 0^2$.

Для последовательностей $a \geq b \geq c$ и $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ выполняется транснеравенство, а именно:

$aa^2+bb^2+cc^2 \geq ab^2+bc^2+ca^2$ и $aa^2+bb^2+cc^2 \geq ac^2+ba^2+cb^2$,

или $a^3+b^3+c^3 \geq ab^2+bc^2+ca^2$ и $a^3+b^3+c^3 \geq ac^2+ba^2+cb^2$.

Сложим два полученных неравенства и прибавим в обеим частям $a^3+b^3+c^3$, получим:

$3(a^3+b^3+c^3) \geq a(a^2+b^2+c^2)+ b(a^2+b^2+c^2)+ c(a^2+b^2+c^2)$, или $3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

Так как числа a, b, c положительные, то разделим обе части полученного неравенства на $3(a^2+b^2+c^2)$, знаки неравенства сохранятся:

$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$.

Доказано.

9. Доказательство.

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$. Тогда, по правилу сравнения дробей, $\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{a_{n-1}} \geq \cdots \geq \frac{1}{a_1} > 0$.

Для последовательностей $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ и $\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{a_{n-1}} \geq \cdots \geq \frac{1}{a_1}$ выполняется транснеравенство, в том числе следующие $n-1$ неравенств:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geq \frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{a_n}{a_n}=1+1+\cdots+1+1=n.$$

$$\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_2}{a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_1}+\frac{a_n}{a_2} \geq \frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{a_n}{a_n}=1+1+\cdots+1+1=n.$$

…

$$\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}+\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{a_n}{a_n}=1+1+\cdots+1+1=n.$$

Таким образом, выполняются следующие $n-1$ неравенств:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

$$\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_2}{a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_1}+\frac{a_n}{a_2} \geq n.$$

…

$\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq n.$

А также выполняется тождество:

$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{a_n}{a_n} = n.$

Сложим все эти неравенства и тождество, получим:

$a_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right) + a_2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right) + \cdots + a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right) \geq n + n + \cdots + n.$

Или $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right) \geq n \cdot n = n^2.$

Доказано.