Занятие номер	Класс	Тема
3	8 база	Остатки.

1. Решение.

Представим число a в виде $a = bq + r$, где q и r – целые числа, $0 \le r < b$. Согласно теореме 1, такое представление единственно. q – это частное, r – это остаток от деления a на b.

а) $387=12\cdot 32+3$. Частное 32, остаток 3.

б) $17=31\cdot 0+17$. Частное 0, остаток 17.

в) $-10=3\cdot(-4)+2$. Частное -4, остаток 2.

г) $-387=12\cdot(-33)+9$. Частное -33, остаток 9.

д) $(n+1)^2=n(n+2)+1$. Частное n+2, остаток 1.

е) $n^2+2n-1=n(n+1)+(n-1)$. Частное n+1, остаток n-1.

Ответ: см. решение.

2. Решение.

Представим число a в виде $a = 67\cdot 29 + r$, где r – целое число, $0 \le r < 67$.

Наибольшее значение числа a будет при наибольшем значении остатка r: $a=67\cdot 29+66=2009$.

Ответ: 2009.

3. Решение.

Представим число a в виде $a = bq + r$, где q и r – целые числа, $0 \le r < b$. Согласно теореме 1, такое представление единственно. q – это частное, r – это остаток от деления a на b.

Если r=0, то a=bq. Тогда $-a = -bq = b(-q) = b(-q) + 0$. То есть остаток от деления числа $-a$ на b равен 0.

Если r>0, то число $-a$ можно представить в виде $-a = -(bq + r) = - bq - r = -bq - b + b - r = b(-q-1)+(b-r)$.

Так как $0 < r < b$, то $0 < b-r < b$. То есть остаток от деления числа $-a$ на b равен $b-r$.

Ответ: 0 (при r=0) или $b-r$ (при r>0).

4. Решение.

По условию задачи, число A можно представить в виде $A = 60q+29 = 63p+29$, где q и p – целые числа. Отсюда получаем, что $60q=63p$.

Так как 60 – четное число, а 63 – нечетное, то, чтобы выполнялось равенство, нужно, чтобы p было четным числом. Так как 63 делится на 7, а 60 не делится на 7, то q должно делиться на 7.

Так как q делится на 7, а p - четное, то 60q и 63p делятся на $2\cdot 7=14$.

Тогда число A можно представить в виде $A = 14n+29 = 14n+2\cdot 14+1 = 14(n+2)+1$. Это значит, что остаток от деления числа A на 14 равен 1.

Ответ: 1.

ООО “НТЛ “2х2” +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

5. Решение.

Предположим, что нашлись такие m последовательных натуральных чисел, среди которых есть два различных числа, дающих одинаковые остатки при делении на m. Пусть это числа a и b такие, что $a=m\cdot q+r$, $b=m\cdot p+r$ и $b>a$.

Разность этих чисел равна $b-a = m\cdot(p-q)$. Это значит, что разность этих чисел делится на m. Так как числа a и b различны, то наименьшая разность этих чисел равна m.

Значит, что между a и b находится не менее m-1 последовательных натуральных чисел. Тогда в рассматриваемой последовательности не менее $2+(m-1)=m+1$ чисел (числа a, b и числа между ними), что противоречит тому, что этих чисел всего m.

Значит, предположение неверно, и среди любых m последовательных натуральных чисел не может быть двух чисел, дающих одинаковые остатки при делении на m.

Ответ: не могут.

6. Решение.

Согласно теореме 2:

а) Остаток от деления a+b+c на 7 равен остатку от деления суммы остатков, то есть суммы $1+4+5=10$. Остаток от деления 10 на 7 равен 3.

б) Остаток от деления $2a-3b+4c$ на 7 равен остатку от деления выражения $2\cdot1-3\cdot4+4\cdot5=2-12+20=10$. Остаток от деления 10 на 7 равен 3.

в) Остаток от деления bc на 7 равен остатку от деления произведения остатков, то есть произведения $4\cdot5=20$. Остаток от деления 20 на 7 равен 6.

г) Остаток от деления $c^3= c\cdot c\cdot c$ на 7 равен остатку от деления произведения остатков, то есть произведения $5\cdot5\cdot5=125$. Остаток от деления 125 на 7 равен 6.

д) Остаток от деления $a^n=a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ на 7 равен остатку от деления произведения остатков, то есть произведения $1\cdot1\cdot\ldots\cdot1=1$. Остаток от деления 1 на 7 равен 1.

Ответ: а) 3, б) 3, в) 6, г) 6, д) 1.

7. Решение.

При делении на 3 возможны три остатка – 0, 1, 2. При делении на 4 – 0, 1, 2, 3. При делении на 5 – 0, 1, 2, 3,4. Составим таблицы умножения остатков:

	0	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Ответ: см. решение.

ООО “НТЛ “2x2” +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

8. Решение.

а) Так как число 2010 делится на 6, то числа 2011, 2012, 2013 и 2014 при делении на 6 дают остатки 1, 2, 3 и 4 соответственно. Тогда $2011 \cdot 2012 + 2013 \cdot 2014 \equiv_6 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14 \equiv_6 2$.

б) $736^3 - 355 \cdot 354 \cdot 353 \equiv_7 1^3 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \equiv_7 1^3 - 60 \equiv_7 1 - 4 = -3 \equiv_7 4$.

в) $9^9 + 9^{19} + 9^{29} \equiv_8 1^9 + 1^{19} + 1^{29} = 1 + 1 + 1 = 3$.

Ответ: а) 2, б) 4, в) 3.

Домашнее задание 3.

Решение.

$13^n \equiv_{12} 1^n = 1$.

Значит, 13^n при делении на 12 может давать только остаток 1.

Ответ: 1.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.