Занятие номер	Класс	Тема
6	7 профи	Признаки равноостаточности.

1. Доказательство.

Рассмотрим произвольное натуральное число на примере семизначного – $\overline{abcdefg}$.

Представим его в виде суммы разрядных слагаемых:

$\overline{abcdefg}$ $=a*10^6+b*10^5+c*10^4+d*10^3+e*10^2+f*10+g \equiv_{10} a*0+b*0+c*0+d*0+e*0+f*0+g = g$.

Доказано.

2. Решение.

$2009\times2010\times2011\times2012\times2014 \equiv_9 2\times3\times4\times5\times7 = 840 \equiv_9 12 \equiv_9 3$

$2009\times2010\times2011\times2012\times2014 \equiv_{11} 7\times(-3)\times(-2)\times(-1)\times1 = -42 \equiv_{11} 2$

Ответ: а) 3, б) 2.

3. Решение.

Число дает такие же остатки при делении на 3 и на 9, как и сумма цифр числа.

$c = 31a^3 + 22b^5 \equiv_3 31*13^3 + 22*29^5 \equiv_3 1*1^3 + 1*2^5 = 1 + 32 = 33 \equiv_3 0$.

$c = 31a^3 + 22b^5 \equiv_9 31*13^3 + 22*29^5 \equiv_9 4*4^3 + 4*2^5 = 4*64 + 4*32 \equiv_9 4*1 + 4*5 = 24 \equiv_9 6$.

Число c делится на 3, но не делится на 9, значит, не может быть полным квадратом.

Ответ: 0, 6, не может.

4. Решение.

Так как при делении на 9 остаток числа равен остатку суммы его цифр, то после каждого действия получалось число, дающее тот же остаток при делении на 9, что и начальное число.

Найдем остаток начального числа при делении на 9.

$2021^{2020} \equiv_9 5^{2020} = 5^{3*673+1} = 5*(5^3)^{673} = 5*125^{673} \equiv_9 5*8^{673} \equiv_9 5*(-1)^{673} = 5*(-1) = -5 \equiv_9 4$.

Из всех однозначных чисел только число 4 дает остаток 4 при делении на 9. Значит, в результате было получено число 4.

Ответ: 4.

5. Доказательство.

Пользуясь признаком равноостаточности при делении на 3, найдем, какие остатки могут давать числа a, b и c в зависимости от остатка начального числа x:

x	0	1	2
$a=x^2$	0	1	1
сумма цифр числа a	0	1	1
b – квадрат суммы цифр числа a	0	1	1
сумма цифр числа b	0	1	1
c – квадрат суммы числа b	0	1	1
a+b+c	0	0	0

Как видим, в любом случае остаток от деления суммы a+b+c на 3 равен 0.

Доказано.

6. Доказательство.

Рассмотрим пятизначное число $\overline{abcde}$. При делении на 11 оно дает такой же остаток, что и знакопеременная сумма его цифр, то есть сумма e – d + c – b + a.

Эту сумму можно представить в виде e – d + c – b + a = (a+c+e) – (b+d). Поэтому числа, полученные из числа $\overline{abcde}$ перестановкой цифр a, c и e на 1-м, 3-м и 5-м местах или цифр b и d на 2-м и 4-м местах, будут давать такие же остатки при делении на 11, что и начальное число.

Таким образом, количество различных остатков чисел, получаемых перестановкой цифр начального числа, не превосходит количество способов выбрать пару цифр, которые будут стоять на 2-м и 4-м местах в числе (или, что то же самое, тройку цифр, которые будут стоять на 1-м, 3-м и 5-м местах в числе).

Выбрать 2 цифры из 5 можно 5*4:2=10 способами. Таким образом, числа, полученные перестановкой цифр начального числа, будут давать не более 10 различных остатков при делении на 11.

Всего же различных остатков при делении на 11 существует 11 (от 0 до 10). Значит, среди остатков чисел, полученных перестановкой цифр начального числа, хотя бы один из остатков не встречается ни разу (так как эти числа дают не более 10 различных остатков).

Доказано.