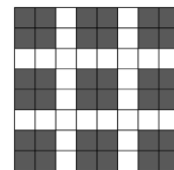


7 база. Раскраски. Часть 2.

1. Доказательство.

Раскрасим доску, как показано на рисунке.

При такой раскраске доска состоит из 9 черных квадратов 2×2 и 24 белых клеток. Заметим, что каждая доминошка может покрывать черные клетки только одного из этих квадратов.



Предположим, что на доске не найдется квадрат из четырех клеток, ни одна из которых не покрыта доминошкой. То есть в любом квадрате 2×2 хотя бы одна клетка покрыта доминошкой. Тогда это выполняется и для каждого черного квадрата. Так как доминошек всего 8, и каждый черный квадрат покрыт хотя бы одной доминошкой, то черных квадратов не более 8, а это противоречит тому, что их на доске 9. Значит, предположение неверно, и найдется такой черный квадрат, ни одна клетка которого не покрыта доминошкой. Это и будет искомым квадрат.

Ответ: доказано.

2. Доказательство.

Раскрасим квадрат 8×8 , как в предыдущей задаче. Заметим, что каждый вырезанный квадрат может включать в себя черные клетки только одного из черных квадратов.

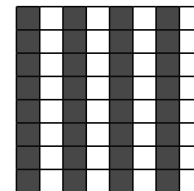
Предположим, что из квадрата 8×8 нельзя вырезать более 8 квадратов 2×2 . Тогда и черных квадратов 2×2 в этом квадрате 8×8 не более 8. Но это противоречит тому, что при нашей раскраске таких квадратов 9. Значит, предположение неверно, и найдется хотя бы один черный квадрат, ни одна клетка которого не включена в 8 вырезанных квадратов. Это и будет искомым квадрат.

Ответ: доказано.

3. Решение.

Раскрасим доску полосатой раскраской, как на рисунке.

При такой раскраске на доске будет 32 черных и 32 белых клетки. Каждая вертикальная доминошка будет состоять из двух клеток одного цвета, а каждая горизонтальная – из двух клеток разных цветов.

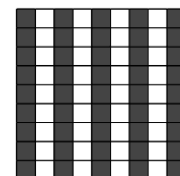


Предположим, что шахматную доску можно разрезать на 13 вертикальных и 19 горизонтальных доминошек. Тогда 13 вертикальных доминошек будут содержать четное количество черных и четное количество белых клеток, а 19 горизонтальных доминошек будут содержать нечетное количество черных и нечетное количество белых клеток. Значит, вся доска будет содержать нечетное количество черных и нечетное количество белых клеток. Это противоречит тому, что на доске 32 черных и 32 белых клетки. Значит, разрезать доску указанным образом нельзя.

Ответ: нельзя.

4. Доказательство.

Раскрасим доску полосатой раскраской, как показано на рисунке. При такой раскраске на доске будет 45 черных и 36 белых клеток. Изначально 45 жуков сидят на черных клетках, 36 жуков сидят на белых клетках.



Заметим, что при перелете каждый жук оказывается на клетке противоположного цвета по сравнению с той, на которой он сидел (меняет цвет клетки). Значит, 36 жуков перелетят с

белых клеток на 45 черных клеток. Так как жуков 36, а клеток 45, то, по принципу Дирихле, окажется хотя бы $45-36=9$ пустых черных клеток.

Ответ: доказано.