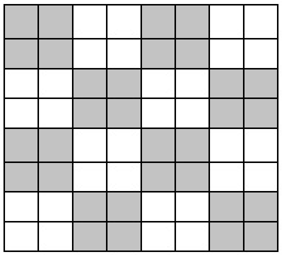
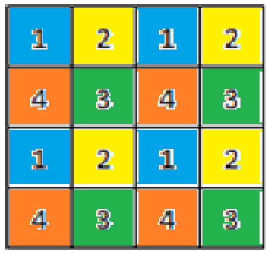
Занятие номер	Класс	Тема
5	7 база	Раскраски. Часть 1.

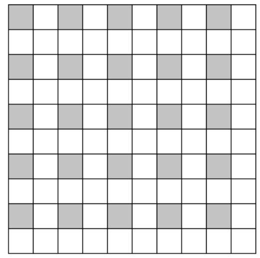
1)



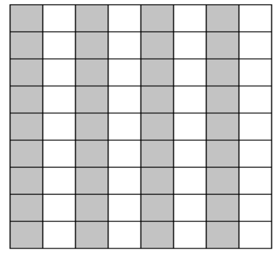
2)



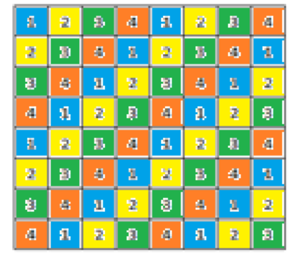
3)



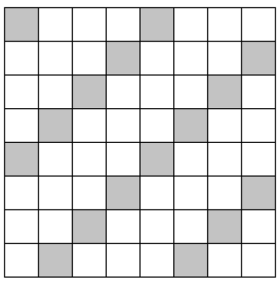
4)



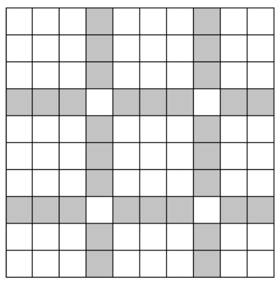
5)



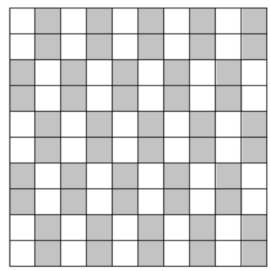
6)



7)



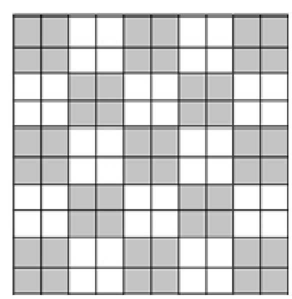
8)



9)

1. Укрупнённая шахматная раскраска.
2. Шахматная в квадрате раскраска.
3. Модифицированная шахматная в квадрате раскраска (оставили только один цвет).
4. Полосатая раскраска.
5. Диагональная раскраска в 3 или более цветов.
6. Модифицированная диагональная раскраска в 3 или более цветов (оставили только один цвет).
7. Ещё пример раскраски.
8. Шахматная в виде домино.
9. Шахматная в квадрате со сдвигом.

1. Доказательство.



1) Раскрасим доску, как показано на рисунке (укрупненная шахматная раскраска). При такой раскраске доска содержит 52 черных и 48 белых клетки.

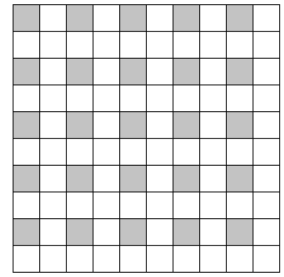
   Предположим, что доску можно замостить дощечками 1x4. Тогда каждая дощечка содержит ровно 2 черных и 2 белых клетки, и таких дощечек всего 100:4=25. Значит, доска содержит 2*25=50 черных и 2*25=5- белых клеток.

   Получили противоречие. Значит, доску 10x10 нельзя замостить дощечками 1x4.

2) Раскрасим доску, как показано на рисунке (шахматная в квадрате раскраска). При такой раскраске доска содержит одинаковое количество клеток каждого из четырех цветов, то есть по 25 красных, зеленых, синих и желтых клеток.

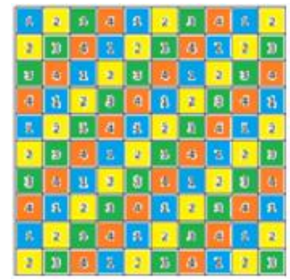
   Предположим, что доску можно замостить дощечками 1x4. Тогда каждая дощечка содержит ровно 2 клетки одного цвета и 2 клетки другого цвета, то есть четное количество клеток каждого цвета. Значит, и вся замощенная дощечками доска содержит четное количество клеток каждого цвета. А это противоречит тому, что клеток каждого цвета – 25. Значит, доску 10х10 нельзя замостить дощечками 1х4.

3) Раскрасим доску, как показано на рисунке (модифицированная шахматная в квадрате раскраска). При такой раскраске доска содержит 25 черных и 75 белых клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета.



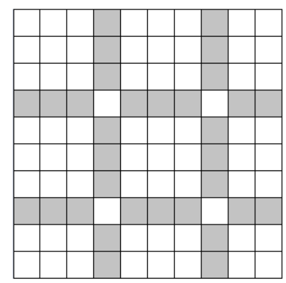
Предположим, что доску можно замостить дощечками 1х4. Тогда каждая дощечка содержит либо 2 черных и 2 белых клетки, либо 4 белых клетки, то есть четное количество клеток каждого цвета. Значит, и вся замощенная дощечками доска содержит четное количество клеток каждого цвета. А это противоречит тому, что клеток каждого цвета – нечетное количество. Значит, доску 10х10 нельзя замостить дощечками 1х4.

4) Раскрасим доску, как показано на рисунке (диагональная раскраска в 4 цвета). При такой раскраске доска содержит 25 синих, 25 зеленых, 24 красных и 26 желтых клеток.



Предположим, что доску можно замостить дощечками 1х4. Тогда каждая дощечка состоит из четырех клеток разных цветов. Значит, вся замощенная дощечками доска содержит одинаковое количество клеток каждого цвета. А оно разное. Получили противоречие. Значит, доску 10х10 нельзя замостить дощечками 1х4.

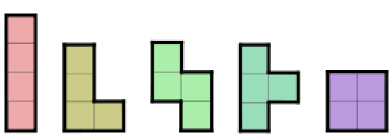
5) Раскрасим доску, как показано на рисунке. При такой раскраске доска содержит 32 черных и 68 белых клетки.



Предположим, что доску можно замостить дощечками 1х4. Тогда каждая дощечка содержит ровно либо 1 белую и 3 черных клетки, либо 1 черную и 3 белых клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета. Всего таких дощечек 100:4=25 – нечетное количество. Значит, вся замощенная дощечками доска содержит нечетное количество черных и нечетное количество белых клеток. А оно четное. Получили противоречие. Значит, доску 10х10 нельзя замостить дощечками 1х4.

2. Решение.

Всего есть 5 видов тетрамино:

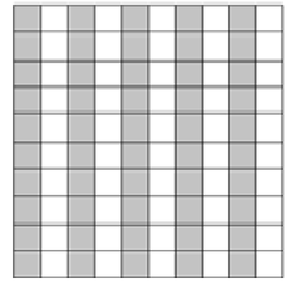


В предыдущей задаче мы доказали, что доску 10х10 нельзя покрыть деталями тетрамино в виде прямоугольника 1х4.

По раскраске из пункта 1) первой задачи также можно увидеть, что деталями в виде квадрата 2х2 доску покрыть можно.

Докажем, что деталями Г-тетрамино, Z-тетрамино и Т-тетрамино доску покрыть невозможно.

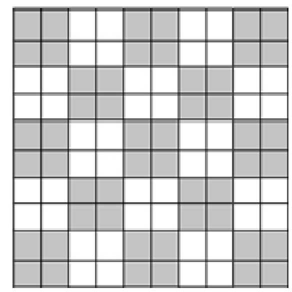
Раскрасим доску полосатой раскраской (см. рисунок).



При такой раскраске доска содержит 50 черных и 50 белых клеток.
Предположим, что доску можно покрыть деталями Г-тертамино. Тогда каждая такая деталь содержит либо 1 черную и 3 белых клетки, либо 1 белую и 3 черных клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета. Таких деталей будет 100:4=25 – нечетное число. Значит, и общее количество клеток каждого цвета на всех дощечках нечетное. А это противоречит тому, что доска содержит по 50 белых и черных клеток.
Значит, нельзя покрыть доску 10х10 деталями Г-тетрамино.

Раскрасим доску шахматной раскраской.
При такой раскраске доска содержит 50 черных и 50 белых клеток.
Предположим, что доску можно покрыть деталями Т-тертамино. Тогда каждая такая деталь содержит либо 1 черную и 3 белых клетки, либо 1 белую и 3 черных клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета. Таких деталей будет 100:4=25 – нечетное число. Значит, и общее количество клеток каждого цвета на всех дощечках нечетное. А это противоречит тому, что доска содержит по 50 белых и черных клеток.
Значит, нельзя покрыть доску 10х10 деталями Т-тетрамино.

Раскрасим доску укрупненной шахматной раскраской (см. рисунок).



При такой раскраске доска содержит 52 черных и 48 белых клеток.
Предположим, что доску можно покрыть деталями Z-тертамино. Тогда каждая такая деталь содержит либо 1 черную и 3 белых клетки, либо 1 белую и 3 черных клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета. Таких деталей будет 100:4=25 – нечетное число. Значит, и общее количество клеток каждого цвета на всех дощечках нечетное. А это противоречит тому, что доска содержит четное количество черных и четное количество белых клеток. Значит, нельзя покрыть доску 10х10 деталями Z-тетрамино.

Ответ: только квадратами 2х2.

3. Доказательство.

«Раскрасим» могикан и гуронов красным цветом, апачей и делаваров – синим цветом.

Докажем, что за столом найдется два человека одного цвета, сидящие рядом. Предположим, что это не так: никакие два человека одного цвета не сидят рядом. Тогда красный и синий цвета за столом чередуются, а значит, красных и синих поровну, а общее их количество четное. Но это противоречит тому, что всего за столом 13 человек, то есть нечетное число. Значит, предположение неверно, и за столом найдутся два человека одного цвета, сидящие рядом.

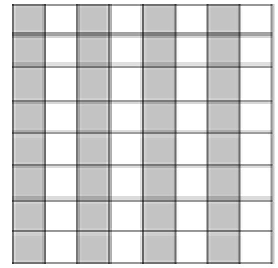
А так как могиканин никогда не сидит с гуроном, а апач с делаваром, то сидящие рядом люди одинакового цвета – представители одного племени.

Ответ: доказано.

Домашнее задание 5.

Шахматный слон ходит по диагонали на любое число клеток. Назовем ход слона нечетным, если слон за этот ход переместился на нечетное число клеток. Однажды слон, сделав несколько ходов, попал из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски (8×8). Докажите, что он сделал нечетное число нечетных ходов. *(Подсказка: подумайте, как раскрасить диагонали, по которым ходит слон)*.

Доказательство.



Раскрасим доску полосатой раскраской. При такой раскраске левая нижняя клетка – черная, а правая верхняя – белая. Заметим, что если слон делает нечетный ход, то он перемещается на клетку противоположного цвета по сравнению с той, на которой стоял (меняет цвет клетки). Если же слон делает четный ход, то он не меняет цвет клетки.

Предположим, что слон сделал четное число нечетных ходов. Тогда первым нечетным ходом он переместиться на белую клетку, вторым нечетны ходом – на черную. Далее после каждого нечетного по счету нечетного хода слон окажется на белой клетке, после каждого четного по счету нечетного хода – на черной. Значит, сделав четное количество нечетных ходов, слон окажется на черной клетке. Клетка в правом верхнем углу белая, значит, на ней он оказаться не сможет. Но по условию задачи слон попал в правую верхнюю клетку. Значит, предположение неверно, и слон сделал нечетное количество нечетных ходов.

Ответ: доказано.