Занятие номер	Класс	Тема
5	7 профи	Остатки степеней.

1. Решение.

$4^{2020} \equiv_3 1^{2020} = 1$

$6^{2020} \equiv_7 (-1)^{2020} = 1$

Ответ: 1, 1.

2. Решение.

$9^{121} + 13^{121} \equiv_{11} (-2)^{121} + 2^{121} = -2^{121} + 2^{121} = 0.$

Ответ: 0.

3. Решение.

а) $2^{100} = 2^{3*33+1} = (2^3)^{33}*2 = 8^{33}*2 \equiv_9 (-1)^{33}*2 = -2 \equiv_9 7.$

б) $33^{77} + 77^{33} \equiv_9 6^{77} + 5^{33} = 6^{2*38+1} + 5^{3*11} = 6*36^{38} + 125^{11} \equiv_9 6*0^{38} + (-1)^{11} = 0 – 1 = -1 \equiv_9 8.$

в) $7^1 \equiv_9 7$, $7^2 \equiv_9 4$, $7^3 \equiv_9 1$. При возведении числа 7 в натуральную степень остатки повторяются циклично по 3: 7-4-1…

$7^7 \equiv_3 1^7 = 1$. Значит, при возведении числа 7 в степень 7^7 остаток будет равен первому остатку цикла, то есть 7.

$7^{7^7} \equiv_9 7.$

Ответ: а) 7, б) 8, в) 7 .

4. Решение.

а) Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 5:

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1

Как видим, при делении на 5 квадрат числа может давать только остатки 0, 1 или 4.

Число 5q + 2 при делении на 5 дает остаток 2. Значит, оно не может быть квадратом целого числа.

б) Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 3:

n	0	1	2
n^2	0	1	1

Как видим, при делении на 3 квадрат числа может давать только остатки 0 или 1.

Число $3q – 1 \equiv_3 – 1 \equiv_3 2$, то есть при делении на 3 дает остаток 2. Значит, оно не может быть квадратом целого числа.

в) Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 6:

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	3	4	1

Как видим, при делении на 6 квадрат числа может давать только остатки 0, 1, 3 или 4.

Число $6q + 2 \equiv_6 2$, то есть при делении на 6 дает остаток 2. А число $6q - 1 \equiv_6 -1 \equiv_6 5$, то есть при делении на 6 дает остаток 5. Значит, эти числа не могут быть квадратами целого числа.

Ответ: а) нет, б) нет, в) нет .

5. Решение.

$7^1 \equiv_{15} 7$, $7^2 \equiv_{15} 4$, $7^3 \equiv_{15} 13$, $7^4 \equiv_{15} 1$ ... При возведении числа 7 в натуральную степень остатки при делении на 15 повторяются циклично по 4: 7-4-13-1…

$777 \equiv_4 1$. Значит, при возведении числа 7 в степень 777 остаток при делении на 15 будет равен первому остатку цикла, то есть 7.

Ответ: 7.

6. Решение.

$2^0 = 1 \equiv_3 1$, $2^1 \equiv_3 -1$, $2^2 \equiv_3 1$, $2^3 \equiv_3 -1$ ... Таким образом, 2 в четной степени по модулю 3 сравнима с 1, 2 в нечетной степени – с -1.

Значит, сумма $1+2+2^2 +...+2^{2008} \equiv_3 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 = 1$. То есть эта сумма при делении на 3 дает остаток 1, то есть на 3 не делится.

Ответ: нет.

7. Решение.

$10^{10} + 10^{100} + \ldots + 10^{10^{10}} \equiv_7 3^{10} + 3^{100} + \ldots + 3^{10^{10}}$

$3^1 \equiv_7 3$, $3^2 \equiv_7 2$, $3^3 \equiv_7 6$, $3^4 \equiv_7 4$, $3^5 \equiv_7 5$, $3^6 \equiv_7 1$ ... Таким образом, при возведении числа 3 в натуральную степень остатки повторяются циклично по 6: 3-2-6-4-5-1…

$10 \equiv_6 4$, $100 = 10^2 \equiv_6 4*4 = 16 \equiv_6 4$, $1000 = 10^3 \equiv_6 4*4 = 16 \equiv_6 4$ … Как видим, 10 в любой натуральной степени при делении на 6 дает остаток 4.

Значит, при возведении числа 3 в степень, равную 10, 100, …, 10^{10}, при делении на 7 в остатке всегда будет получаться 4-ое число цикла, то есть 4.

$3^{10} + 3^{100} + \ldots + 3^{10^{10}} \equiv_7 4+4+\ldots+4 = 4*10 = 40 \equiv_7 5$.

Ответ: 5.

8. Доказательство.

$2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2006\cdot2008 - 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007 \equiv_{2009} (-2007)\cdot(-2005)\cdot(-2003)\cdot\ldots\cdot(-3)\cdot(-1) - 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007$

Нечетных чисел от 1 до 2007 всего 1004, то есть четное количество. Значит, в первом произведении все «минусы» дадут «плюс»:

$(-2007)\cdot(-2005)\cdot(-2003)\cdot\ldots\cdot(-3)\cdot(-1)-1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007=2007\cdot2005\cdot2003\cdot\ldots\cdot3\cdot1-1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007=0$.

Таким образом, $2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2006\cdot2008 - 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007 \equiv_{2009} 0$, значит, это выражение делится на 2009.

Доказано.

9. Доказательство.

Докажем, что остатки этих выражений при делении на соответствующие числа равны 0.

а) $18^n - 11^n \equiv_7 4^n - 4^n = 0$.

б) $7^{n} + 5^{2n+1} = 7^n + 5*(5^2)^n = 7^n + 5*25^n \equiv_3 1^n + 2*1^n = 1+2*1 = 3 \equiv_3 0$.

в) $2^{3n} - 1 = 8^n - 1 \equiv_7 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$.

г) $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 3^2*(3^2)^n + 2*(2^6)^n = 9*9^n + 2*64^n \equiv_{11} (-2)*(-2)^n + 2\ (-2)^n = 0$.

д) $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2*11^n + 12*(12^2)^n = 121*11^n + 12*144^n \equiv_{133} (-12)*11^n + 12*11^n = 0$.

Доказано.

10. Доказательство.

Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 9:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1

Как видим, при делении на 9 квадрат числа может давать только остатки 0, 1, 4 или 7.

Так как сумма трех натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9, сумма остатков этих трех чисел кратна 0. Это возможно, если числа дают такие остатки при делении на 9:

0, 0, 0 (сумма остатков равна 0); 1, 1, 7 (сумма остатков равна 9); 1, 4, 4 (сумма остатков равна 9);

4, 7, 7 (сумма остатков равна 18).

Как видим, во всех четырех случаях среди чисел найдутся два, дающих одинаковые остатки при делении на 9, а значит, их разность делится на 9. Что и требовалось доказать.

Доказано.

11. Доказательство.

Рассмотрим таблицу остатков числа и его квадрата при делении на 3:

n	0	1	2
n^2	0	1	1

Как видим, при делении на 3 квадрат числа может давать только остатки 0 или 1, причем, 0 – только в случае, если само число делится на 3.

Так как $x^2 + y^2$ делится на 3 (то есть дает остаток 0 при делении на 3), то числа x^2 и y^2 дают остатки 0 при делении на 3 (иначе сумма $x^2 + y^2$ дает остаток 1 или 2 при делении на 3). А это возможно только в том случае, если x и y делятся на 3.

Доказано.