Занятие номер	Класс	Тема
2	7 профи	Основная теорема арифметики. Продолжение

1. Решение.

Чтобы одно число делилось на другое, нужно, чтобы первое число в своем разложении на простые множители содержало все простые множители второго числа в степенях, не меньших чем во втором числе.

а) $81=3^4$. Данное число содержит множитель 3 в 4-й степени, значит, оно делится на 81.

б) $56=2^3 \cdot 7$. Данное число содержит множитель 2 только во 2-й степени, значит, оно не делится на 56.

в) $156=2^2 \cdot 3 \cdot 13$. Данное число не содержит множитель 13, значит, оно не делится на 156.

Ответ: а) делится, б) не делится, в) не делится.

2. Решение.

Если число является полным квадратом, то все множители входят в его разложение в четной степени.

а) $2^4 \cdot 7^8$ – степени множителей четные. Это число является квадратом числа $2^2 \cdot 7^4$.

б) $2^2 \cdot 3^6 \cdot 17^{12}$ – степени множителей четные. Это число является квадратом числа $2 \cdot 3^3 \cdot 17^6$.

в) $11^{13} \cdot 13^{14} \cdot 37^2$ – степень множителя 11 нечетная. Это число не является квадратом числа.

Ответ: а) является, б) является, в) не является.

3. Решение.

Сумма цифр такого числа равна 0*100+1*100+2*100=300. Число 300 делится на 3, но не делится на 9. Значит, и само число делится на 3, но не делится на 9. Значит, в его разложение на простые множители множитель 3 входит в нечетной степени 1. Значит, это число не является полным квадратом.

Ответ: не может.

4. Решение.

Посчитаем, сколько чисел от 1 до 100 делится на 5 и на 25 (то есть на степени числа 5) и просуммируем эти значения. Дело в том, что 10 можно получить, умножив 5 на 2 (и больше никак иначе). Двоек-множителей у нас в избытке (есть в каждом четном числе), а значит, нас интересуют только пятёрки. Каждая из пятёрок будет давать 0 в указанном числе.

Среди чисел от 1 до 100 каждое пятое делится на 5. Количество таких чисел равно целой части от деления 100:5, то есть 20. Значит, 20 чисел дадут по одному нулю в произведении.

Кроме того, каждое пятое из этих 20 чисел делится на 25. Количество таких чисел равно целой части от деления 20:5, то есть 4. Эти 4 числа дадут еще по одному нулю в произведении.

Таким образом, число 100! будет оканчиваться 20+4=24 нулями.

Ответ: 24 нулями.

5. Доказательство.

Среди чисел от 1 до 100 каждое 5-е делится на 5, каждое 25-е делится на 25. То есть 20 чисел делятся на 5^1, в том числе 4 из них делятся на 5^2. Таким образом, в разложении числа 100! на простые множители есть 20+4=24 множителя 5 (5^{24}).

Среди чисел от 1 до 100 каждое 2-е делится на 2, каждое 4-е делится на 4, каждое 8-е делится на 8, и так далее. То есть 50 чисел делятся на 2^1, в том числе 25 из них делятся на 2^2, 12 делятся на 2^3, и так далее. Таким образом, в разложении числа 100! на простые множители есть более 50 множителей 2.

Разделим число 100! на $10^{24}=2^{24} \cdot 5^{24}$. Получим число, которое не делится на 10 (так как не содержит в своем разложении пятерок), а значит, заканчивается не на 0. При этом в разложении полученного числа есть более 50-24=26 множителей 2, то есть оставшееся число четно, значит, заканчивается четной цифрой. Это значит, что в исходном числе 100! последняя ненулевая цифра четная.

Доказано.