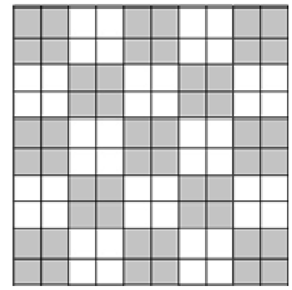
Занятие номер	Класс	Тема
5	6 профи	Раскраски. Часть 1.

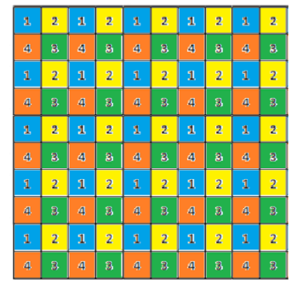
1. Доказательство.



1) Раскрасим доску, как показано на рисунке (укрупненная шахматная раскраска). При такой раскраске доска содержит 52 черных и 48 белых клетки.

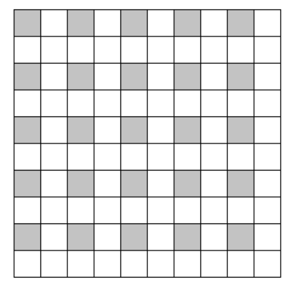
   Предположим, что доску можно замостить дощечками 1x4. Тогда каждая дощечка содержит ровно 2 черных и 2 белых клетки, и таких дощечек всего 100:4=25. Значит, доска содержит 2*25=50 черных и 2*25=5- белых клеток.

   Получили противоречие. Значит, доску 10x10 нельзя замостить дощечками 1x4.



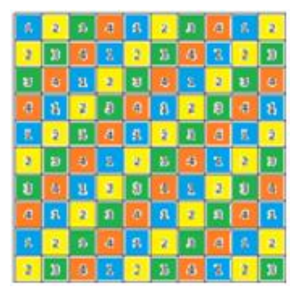
2) Раскрасим доску, как показано на рисунке (шахматная в квадрате раскраска). При такой раскраске доска содержит одинаковое количество клеток каждого из четырех цветов, то есть по 25 красных, зеленых, синих и желтых клеток.

   Предположим, что доску можно замостить дощечками 1x4. Тогда каждая дощечка содержит ровно 2 клетки одного цвета и 2 клетки другого цвета, то есть четное количество клеток каждого цвета. Значит, и вся замощенная дощечками доска содержит четное количество клеток каждого цвета. А это противоречит тому, что клеток каждого цвета – 25. Значит, доску 10x10 нельзя замостить дощечками 1x4.



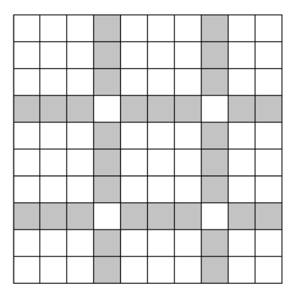
3) Раскрасим доску, как показано на рисунке (модифицированная шахматная в квадрате раскраска). При такой раскраске доска содержит 25 черных и 75 белых клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета.

   Предположим, что доску можно замостить дощечками 1x4. Тогда каждая дощечка содержит либо 2 черных и 2 белых клетки, либо 4 белых клетки, то есть четное количество клеток каждого цвета. Значит, и вся замощенная дощечками доска содержит четное количество клеток каждого цвета. А это противоречит тому, что клеток каждого цвета – нечетное количество. Значит, доску 10x10 нельзя замостить дощечками 1x4.



4) Раскрасим доску, как показано на рисунке (диагональная раскраска в 4 цвета). При такой раскраске доска содержит 25 синих, 25 зеленых, 24 красных и 26 желтых клеток.

   Предположим, что доску можно замостить дощечками 1x4. Тогда каждая дощечка состоит из четырех клеток разных цветов. Значит, вся замощенная дощечками доска содержит одинаковое количество клеток каждого цвета. А оно разное. Получили противоречие. Значит, доску 10x10 нельзя замостить дощечками 1x4.

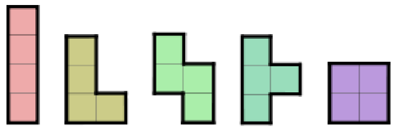


5) Раскрасим доску, как показано на рисунке. При такой раскраске доска содержит 32 черных и 68 белых клетки.

   Предположим, что доску можно замостить дощечками 1x4. Тогда каждая дощечка содержит ровно либо 1 белую и 3 черных клетки, либо 1 черную и 3 белых клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета. Всего таких дощечек 100:4=25 – нечетное количество. Значит, вся замощенная дощечками доска содержит нечетное количество черных и нечетное количество белых клеток. А оно четное. Получили противоречие. Значит, доску 10x10 нельзя замостить дощечками 1x4.

2. Решение.

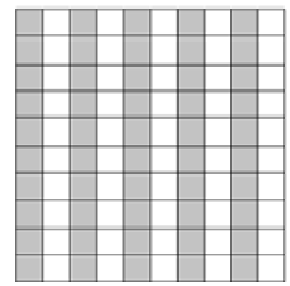
Всего есть 5 видов тетрамино:



В предыдущей задаче мы доказали, что доску 10x10 нельзя покрыть деталями тетрамино в виде прямоугольника 1x4.

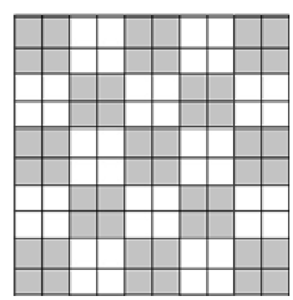
По раскраске из пункта 1) первой задачи также можно увидеть, что деталями в виде квадрата 2x2 доску покрыть можно.

Докажем, что деталями Г-тетрамино, Z-тетрамино и Т-тетрамино доску покрыть невозможно.



Раскрасим доску полосатой раскраской (см. рисунок).
При такой раскраске доска содержит 50 черных и 50 белых клеток.
Предположим, что доску можно покрыть деталями Г-тертамино. Тогда каждая такая деталь содержит либо 1 черную и 3 белых клетки, либо 1 белую и 3 черных клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета. Таких деталей будет 100:4=25 – нечетное число. Значит, и общее количество клеток каждого цвета на всех дощечках нечетное. А это противоречит тому, что доска содержит по 50 белых и черных клеток. Значит, нельзя покрыть доску 10x10 деталями Г-тетрамино.

Раскрасим доску шахматной раскраской.
При такой раскраске доска содержит 50 черных и 50 белых клеток.
Предположим, что доску можно покрыть деталями Т-тертамино. Тогда каждая такая деталь содержит либо 1 черную и 3 белых клетки, либо 1 белую и 3 черных клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета. Таких деталей будет 100:4=25 – нечетное число. Значит, и общее количество клеток каждого цвета на всех дощечках нечетное. А это противоречит тому, что доска содержит по 50 белых и черных клеток. Значит, нельзя покрыть доску 10x10 деталями Т-тетрамино.



Раскрасим доску укрупненной шахматной раскраской (см. рисунок).
При такой раскраске доска содержит 52 черных и 48 белых клеток.
Предположим, что доску можно покрыть деталями Z-тертамино. Тогда каждая такая деталь содержит либо 1 черную и 3 белых клетки, либо 1 белую и 3 черных клетки, то есть нечетное количество клеток каждого цвета. Таких деталей будет 100:4=25 – нечетное число. Значит, и общее количество клеток каждого цвета на всех дощечках нечетное. А это противоречит тому, что доска содержит четное количество черных и четное количество белых клеток. Значит, нельзя покрыть доску 10x10 деталями Z-тетрамино.

Ответ: только квадратами 2x2.

3. Доказательство.

«Раскрасим» могикан и гуронов красным цветом, апачей и делаваров – синим цветом.

Докажем, что за столом найдется два человека одного цвета, сидящие рядом. Предположим, что это не так: никакие два человека одного цвета не сидят рядом. Тогда красный и синий цвета за столом чередуются, а значит, красных и синих поровну, а общее их количество четное. Но это противоречит тому, что всего за столом 13 человек, то есть нечетное число. Значит, предположение неверно, и за столом найдутся два человека одного цвета, сидящие рядом.

А так как могиканин никогда не сидит с гуроном, а апач с делаваром, то сидящие рядом люди одинакового цвета – представители одного племени.

Ответ: доказано.

4. Доказательство.

Раскрасим доску шахматной в квадрате раскраской. Королей, стоящих на доске раскрасим в цвет клетки, на которой они стоят. Таким образом, все короли будут раскрашены в 4 цвета. Причем, как видно по рисунку, под боем короля каждого цвета окажутся клетки только трех остальных цветов. Значит, короли одного цвета не будут бить друг друга.

Ответ: доказано.