6 профи. Принцип Дирихле. Часть 3.

1. **Решение.**

Всего двузначных чисел 90.

Для каждого из чисел от 10 до 49 имеется число от 90 до 51, которое в сумме с первым числом дает 100. Таких пар не имеет число 50 и числа от 91 до 99. Таким образом, все двузначные числа можно разбить на 40 пар чисел, дающих в сумме 100, и еще 10 чисел без пары.

Предположим, что Петя сможет это сделать: написать на доске 55 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100. Тогда среди написанных чисел может быть не более 40 чисел из указанных пар (по одному числу из каждой пары) и не более 10 чисел без пары, то есть не более 50 различных чисел. Получили противоречие. Значит, Петя не сможет написать 55 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: не сможет.

2. **Решение.**

Так как в каждой строке таблицы 101 клетка, а цветов всего 100, то в каждой строке найдутся хотя бы 2 клетки одного цвета. Значит, каждую строку можно перекрасить в один цвет.

После этого все столбцы таблицы будут покрашены одинаково. Так как в каждом столбце 101 клетка, а цветов всего 100, то в каждом столбце найдутся хотя бы 2 клетки одного цвета. Значит, можно перекрасить каждый столбец в один цвет. А так как столбцы после перекрашивания строк были покрашены одинаково, то все столбцы можно перекрасить в один и тот же цвет.

Таким образом, таблицу всегда можно перекрасить в один цвет.

Ответ: всегда.

3. **Доказательство.**

Предположим, что это не так: никакие 2 точки, расстояние между которыми 1 м, не раскрашены в один цвет. Рассмотрим на плоскости равносторонний треугольник со стороной 1 м. Так как каждая вершина треугольника находится на расстоянии 1 м от двух других вершин, то все три вершины – разных цветов, а значит, цветов не мене трех. Это противоречит условию задачи. Значит, предположение неверно, и найдутся 2 точки на расстоянии 1 м друг от друга, раскрашенные в 1 цвет.

Доказано.

4. **Решение.**

Пусть за столом сидят N дипломатов. Соответственно, на столе стоит N табличек. Поворачивая стол, можно расположить его в N различных положениях. Так как в первом положении стола ни один из дипломатов не оказался около своей таблички, то остается N-1 возможных положений стола. Докажем, что хотя бы в одном из этих положений по крайней мере два дипломата окажутся около своих табличек.

Предположим, что это не так: в любом из N-1 положений стола около своей таблички окажется не более 1 дипломата. Тогда дипломатов не более N-1, а это противоречит условию, что дипломатов N. Значит, предположение неверно, и найдется такое положение стола, в котором, по крайней мере, два дипломата окажутся около своих табличек.

Ответ: можно.

5. Доказательство.

Предположим, что это не так: нельзя поставить три не бьющие друг друга ладьи в клетки, сумма чисел в которых больше, чем 33. Тогда при любой расстановке трех не бьющих друг друга ладей, сумма чисел в клетках, на которых стоят ладьи, не больше 33. Во всех клетках квадрата можно разместить 3 набора из трех не бьющих друг друга ладей. Значит, во всех клетках квадрата сумма чисел не больше 3*33=99, а это противоречит условию задачи. Значит, предположение неверно, можно поставить три не бьющие друг друга ладьи в клетки, сумма чисел в которых больше, чем 33.

Доказано.