Занятие номер	Класс	Тема
2	6 профи	Делимость. Продолжение.

1. **Доказательство.**

   Сумма цифр числа $\overline{aaa}$ равна $a+a+a=3a$, значит, делится на 3. Тогда и само число $\overline{aaa}$ делится на 3.

   Представим число $\overline{aaa}$ в виде суммы разрядных слагаемых: $\overline{aaa}=100a+10a+a=(100+10+1)a=111a$. Значит, число $\overline{aaa}$ делится на 111. 111=37*3, то есть 37 – делитель числа 111. Значит, и число $\overline{aaa}$ делится на 37.

   Доказано.

2. **Доказательство.**

   Так как число 3 делится на 3, то и сумма его цифр делится на 3. При сложении двух чисел, делящихся на 3, получается число, также делящееся на 3. Значит, через час на счету у Васи было количество долларов, делящееся на 3. Сумма цифр этого числа так же делится на 3, поэтому еще через час на счету у Васи снова в сумме будет количество долларов, делящееся на 3. И так далее, через любое количество часов на Васином счету находится делящееся на 3 количество долларов.

   Сумма цифр числа 3329000000 равна 17, 17 не делится на 3. Значит, и 3329000000 не делится на 3. Значит, Васю обсчитали.

   Доказано.

3. **Решение.**

   Допустим, что такое возможно. Пусть число, составленное из цифр одной строки, не делится на 3, а все остальные числа, составленные из цифр остальных четырех строк и всех пяти столбцов, делятся на 3. Тогда сумма цифр в одной строке не делится на 3, а суммы цифры в остальных строках и во всех столбцах делятся на 3.

   Посчитаем сумму цифр в таблице по столбцам. Так как в каждом столбце сумма цифр делится на 3, то сумма цифр во всех столбцах – это сумма пяти слагаемых, делящихся на 3, а значит, она тоже делится на 3. То есть сумма цифр во всей таблице *делится* на 3.

   Посчитаем сумму цифр в таблице по строкам. Так как в четырех строках сумма цифр делится на 3, то сумма цифр в этих четырех строках делится на 3. В одной строке сумма цифр не делится на 3. Значит, сумма цифр в четырех строках и в этой строке – это сумма числа, делящегося на 3, и числа, не делящегося на 3, а значит, она не делится на 3. То есть сумма цифр во всей таблице *не делится* на 3.

   Получили противоречие. Значит, предположение неверно, и не может оказаться, что ровно одно из чисел не делится на 3.

   Ответ: не может.

4. **Доказательство.**

   Рассмотрим пятизначное число $\overline{abcde}$ и число, получающееся из этого числа перестановкой цифр, например, число $\overline{cdabe}$.

   Представим эти числа в виде суммы разрядных слагаемых и найдем их разность:

   $\overline{abcde} - \overline{cdabe} = 10000a+1000b+100c+10d+e - 10000c - 1000d - 100a - 10b - e$

В этом выражении сгруппируем слагаемые с одинаковыми буквенными множителями и вынесем эти множители за скобки:

$\overline{abcde} - \overline{cdabe} = (10000 - 100)a + (1000 - 10)b + (100 - 10000)c + (10d - 1000)d + (1 - 1)e = 9900a + 990b + (-9900)c + (-990)d.$

Как видим, каждое слагаемое выражения содержит множитель, делящийся на 9 (9900, 990, -9900, -990). Значит, и все выражение делится на 9. Таким образом, разность чисел $\overline{abcde}$ и $\overline{cdabe}$ делится на 9.

Заметим, что это верно для любого числа, получаемого перестановкой цифр числа $\overline{abcde}$. Действительно, если представить оба числа в виде суммы разрядных слагаемых, найти их разность и сгруппировать слагаемые с одинаковыми буквами, то каждое слагаемое будет содержать множитель вида $10^m - 10^n$, а каждый такой множитель делится на 9 (так как представляет собой последовательность нескольких девяток и нулей, значит, сумма их цифр делится на 9). Это можно видеть из таблицы:

Разность	10000	1000	100	10	1
10000	0	9000	9900	9990	9999
1000	-9000	0	900	990	999
100	-9900	-900	0	90	99
10	-9990	-990	-90	0	9
1	-9999	-999	-99	-9	0

Доказано.

5. **Доказательство.**

Сумма цифр числа, записываемого 9-ю единицами, равна 9. Значит, это число делится на 9, то есть это число можно представить в виде 111111111=9n, где n – целое число.

27 единиц – это 3 группы по 9 единиц. Поэтому число, записываемое 27-ю единицами, можно представить в виде $111111111*10^{18}+111111111*10^{9}+111111111$. Вынесем 111111111 за скобки, получим $111111111*(10^{18}+10^{9}+1)$. Сумма цифр числа $10^{18}+10^{9}+1$ равна 3, значит, это число делится на 3, то есть может быть представлено в виде 3m, где m – целое число.

Таким образом, число, записываемое 27-ю единицами, может быть представлено в виде 111111111*3m=9n*3m=27*nm. Значит, это число делится на 27.

Доказано.

6. **Решение.**

Например, при n=41 значение выражение равно 41*41+41+41=41*(41+1+1)=41*43. Так как это число делится на 41 и 43, то оно не является простым.

Ответ: неверно.

7. **Решение.**

Пусть дано число $\overline{ab}$. По условию задачи, $a+b$ делится на 3 и $\overline{a0b}+2*a=9*\overline{ab}$.

Представим числа $\overline{a0b}$ и $\overline{ab}$ в виде суммы разрядных слагаемых:

$\overline{a0b} = 100a+b,\ \overline{ab} = 10a+b.$

Тогда получим, что $100a+b+2a=9*(10a+b)$, или $102a+b=90a+9b$, или $12a=8b$, или $3a=2b$.

Перебрав все возможные значения для цифры a, получим, что этому равенству удовлетворяют такие a и b соответственно: 2 и 3, 4 и 6, 6 и 9.

Так как $a+b$ делится на 3, то из перечисленных вариантов подходят только цифры 6 и 9, то есть исходное двузначное число – это 69.

Ответ: 69.